

·中文译本·

复合电磁同心球系统的成像电子光学. A 章:近轴光学

周立伟*

北京理工大学光电学院, 北京 100081

摘要 通过复合电磁同心球系统的理想模型,对成像电子光学近轴方程的轨迹求解进行探讨。首次推导了该系统的近轴电子轨迹的转角及近轴方程的两个特解的解析表达式,探讨了近轴成像性质,并将结果推广到两电极静电同心球系统、均匀平行复合电磁系统和静电近贴系统中。

关键词 成像系统; 成像系统的电子光学; 复合电磁阴极透镜; 复合电磁同心球系统; 近轴方程特解; 近轴电子光学

中图分类号 O463

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS201939.0411001

Imaging Electron Optics of a Combined Electromagnetic Concentric Spherical System. Part A: Paraxial Optics

Zhou Liwei*

School of Optics & Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract The ray solutions of paraxial equation for imaging electron optics have been explored by an ideal model of combined electromagnetic concentric spherical system in the present paper. The exact analytical expressions of rotational angle as well as two special solutions of paraxial equation in this system have been firstly derived, and the paraxial imaging properties have also been investigated. The results have been generalized to the bi-electrode electrostatic concentric spherical system, the homogeneous and parallel combined electromagnetic system, and the electrostatic proximity system.

Key words imaging systems; electron optics of imaging systems; combined electromagnetic cathode lenses; combined electromagnetic concentric spherical system; special solutions of paraxial equation; paraxial electron optics

OCIS codes 110.2990; 260.2110; 230.0250

1 引 言

由两个具有共同曲率中心的球面电极组成的球形电容器系统称为两电极静电同心球系统。若在此系统外施加同心径向磁场,使其处处与电场方向相平行,则构成两电极复合电磁同心球系统,简称为复合电磁同心球系统。也就是说,系统具有处处互相平行的径向电场和径向磁场,电场强度方向永远指向阴极面,而磁感应强度方向与电场强度方向相同或相反^[1]。

与静电两电极同心球系统类似,以复合电磁同心球系统作为像管的成像系统,一直是宽束电子光学研究者感兴趣的研究对象。从电子光学的角度来

看,其电场和磁场分布能以解析形式表示,系统可以达到放大率大于 1 或小于 1 的要求。若能求得电子轨迹的解析表达式,便可以定量地研究电子光学性质和像差。无论是严格精确或近似实现的复合电磁同心球系统(其特例是静电两电极同心球系统),都能得到很好的像质。若成像屏为球面,由于球对称结构,系统除近轴色球差与几何球差外,其他类型的像差不复存在。特别是在对复合电磁聚焦的像管进行数值计算时,由此模型获得的解析解可以用作初始轨迹的表头或校验初始轨迹计算误差。

一般而言,对于复合电磁成像系统,求电子光学近轴方程在已知电位分布与磁场分布下的电子轨迹解析解是一个极为棘手的问题。早在 20 世纪 60 年

收稿日期: 2018-09-04; 修回日期: 2018-10-23; 录用日期: 2018-11-08

* E-mail: zhoulw@vip.sina.com

代,作者解决了此系统电子轨迹在电子轴向初电位 $\epsilon_z \neq 0$ 下的解析求解问题。后来,我们求得实际轨迹的解析解以及近轴轨迹的解、近似解和渐近解,并系统研究了横向像差和时间像差^[2-5]。对于复合电磁成像系统,由于电场和磁场汇集在一起,电场使轨迹加速,磁场使轨迹旋转,无论是轨迹方程或是运动方程,其求解都十分复杂。人们一直试图求其近轴方程的解析解,以便更为精确地了解电子运动的形态,分析系统的近轴像差和几何像差构成。因此,这一直是电子光学学术界有待解决的问题。

复合电磁同心球系统作为成像系统曾有相关研究^[6-7],然其电子轨迹是用计算机通过数值方法求解的,文献^[8]仅对一种最简单的均匀平行复合电磁系统的成像特性与像差进行了探讨。作者于1978年首先报道了用解析方法研究复合电磁同心球系统^[1],用类比的方法求得近轴电子轨迹的特解 $v(z, \epsilon_z)$ 的解析表达式,推导了系统的聚焦条件,研究了近轴色球差,并将结果推广到几种特殊情况。稍后,俄罗斯学者 N. A. Smirnov, M. A. Monastyrski 和 Yu. V. Kulikov 等^[9]也对复合电磁同心球系统的成像特性及像差进行了研究,给出了近轴方程在 $\epsilon_z = 0$ 下二特解的零级近似表达式,并在此基础上定义横向像差。

十分幸运的是,对于复合电磁同心球系统,尽管其电位分布和磁场分布相互交织在一起,但经过巧妙的处理后,我们仍然可以获得近轴方程在 $\epsilon_z \neq 0$ 下二特解的解析表达式。

应该指出,复合电磁同心球系统中电子轨迹二特解解析表达式的获得,是宽束电子光学中一种极为罕见的情况。本文详细叙述了如何求得复合电磁同心球系统中近轴方程二特解的精确表达式的过程,并将得到的结果推广到一些特殊情况——两电极静电同心球系统、均匀平行复合电磁系统以及静电近贴系统。在随后的文章中,我们将探讨近轴方程二特解的近似解、渐近解以及近轴横向像差等问题。

2 复合电磁成像系统的近轴成像概述

在复合电磁成像电子光学系统(图1)中,旋转坐标系下的近轴轨迹 $u^*(z)$ 是近轴方程

$$u^{*''}(z) + \frac{\Phi'(z)}{2[\Phi(z) + \epsilon_z]} u^{*'}(z) + \frac{1}{4[\Phi(z) + \epsilon_z]} \left[\Phi''(z) + \frac{e}{2m_0} B^2(z) \right] u^*(z) = 0 \quad (1)$$

的解^[10]。式中: $u^*(z)$ 为电子在旋转坐标系 (x, y) 中的位置矢量; $\Phi(z)$ 、 $B(z)$ 分别为轴上电位分布和磁感应强度分布; ϵ_z 为与逸出电子轴向初能对应的轴向初电位; e/m_0 为电子荷质比; $' = d/dz$ 表示对 z 的导数; 星号“*”表示近轴情况。

令 $r^*(z)$ 为电子在固定坐标系 (X, Y) 中的位置矢量,它与 $u^*(z)$ 的关系为

$$r^*(z) = u^*(z) \exp[j\chi(z, \epsilon_z)], \quad (2)$$

式中: $j = \sqrt{-1}$; $\chi(z, \epsilon_z)$ 为电子轨迹的转角,是旋转坐标系 (x, y) 相对于固定坐标系 (X, Y) 转过的角度:

$$\chi(z, \epsilon_z) = \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{e}{8m_0}} \frac{B(z)}{\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z}} dz + \chi_0, \quad (3)$$

式中: $\chi_0 = \chi(z_0 = 0)$ 为旋转坐标系的初始转角,通常可假定 $\chi_0 = 0$ 。

(3)式表明,自阴极面逸出电子转过的角度 $\chi = \chi(z, \epsilon_z)$ 与电子逸出的高度 r_0 及电子的径向初速 \dot{r}_0 无关,仅与 $\Phi(z)$ 、 $B(z)$ 以及电子的轴向初速 \dot{z} 有关。只要电子的轴向初速 \dot{z} 相同,所有电子,不管是在轴上还是轴外,都转过相同的角度。

(1)式为二阶线性齐次微分方程,其特解 $v(z, \epsilon_z)$ 、 $w(z, \epsilon_z)$ 满足的初条件可表示为

$$v(z=0) = 0, \quad v'(z=0) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_z}}, \quad (4)$$

$$w(z=0) = 1, \quad w'(z=0) = 0. \quad (5)$$

这两个特解还必须满足朗斯基行列式:

$$\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} (v'w - vw') = 1. \quad (6)$$

近轴方程(1)式的通解可表示为

$$u^*(z) = r_0 w(z) + \left[\sqrt{\frac{m_0}{2e}} \dot{r}_0 - (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0) \sqrt{\frac{e}{8m_0}} B_0 \right] v(z). \quad (7)$$

故由(2)式可得

$$r^*(z) = r_0 w(z) \exp[j\chi(z)] + \left[\sqrt{\frac{m_0}{2e}} \dot{r}_0 - (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0) \sqrt{\frac{e}{8m_0}} B_0 \right] v(z) \exp[j\chi(z)], \quad (8)$$

式中: \mathbf{k} 为沿 z 轴正方向的单位矢量; \mathbf{r}_0 和 \dot{r}_0 分别为电子自阴极面逸出时的初始位置矢量及径向初速矢量。

令 ϵ_{z1} 与 $z = z_i$ 的理想像面对应,即 $v(z_i, \epsilon_{z1}) = 0$, $\chi(z_i, \epsilon_{z1}) = i\pi$, 其中 i 为圈数。则

$$r^*(z_i, \epsilon_{z1}) = r_0 w(z_i, \epsilon_{z1}) = r_0 M, \quad (9)$$

式中: M 为系统的线放大率。

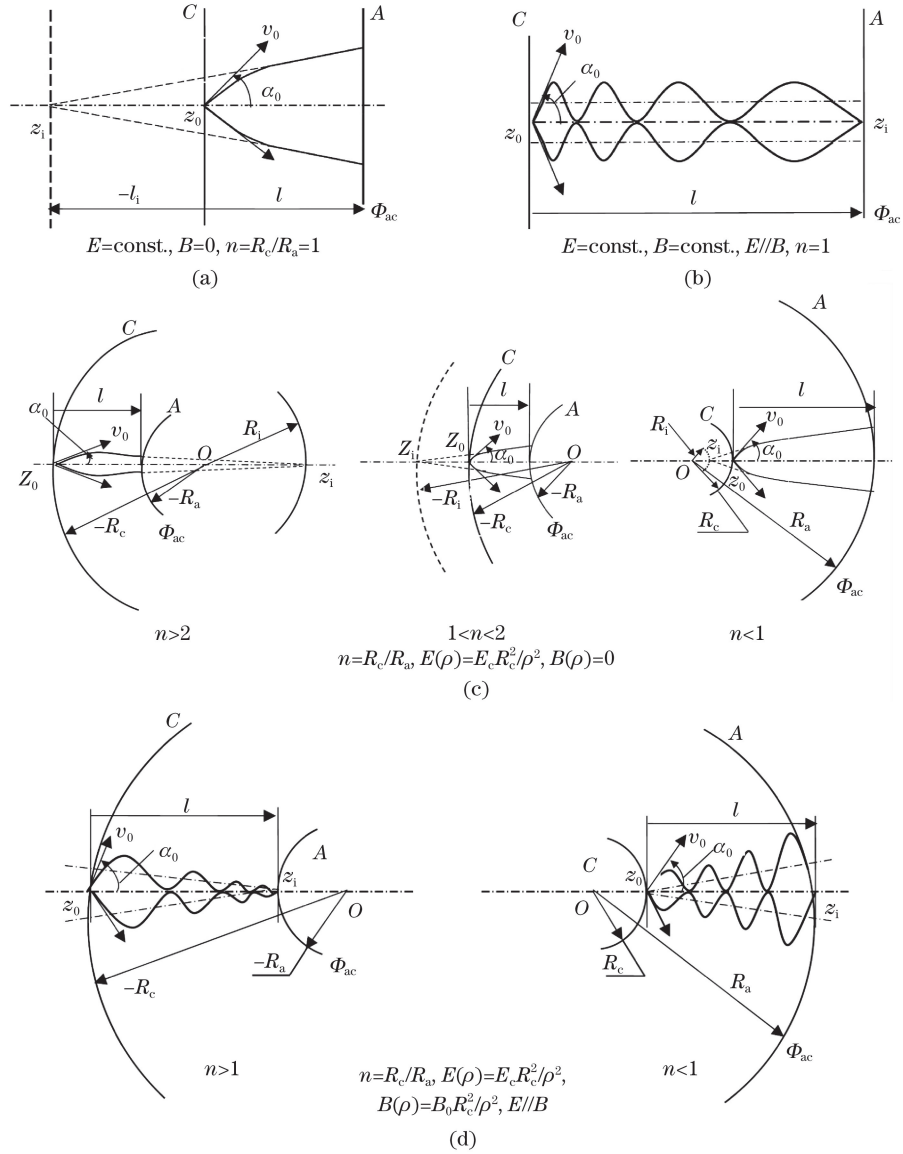


图 1 复合电磁同心球系统及其三种特殊情况

Fig. 1 Combined electromagnetic concentric spherical system and three special cases

3 复合电磁同心球系统近轴轨迹的求解

3.1 场的解析表示

对于复合电磁同心球系统,电场强度 \mathbf{E} 的方向与阴极面的法线重合,磁感应强度 \mathbf{B} 处处与 \mathbf{E} 平行,按照球对称条件,在矢径 ρ 的方向,有

$$E_\rho = E_c \frac{R_c^2}{\rho^2}, B_\rho = B_0 \frac{R_c^2}{\rho^2}, \quad (10)$$

式中: E_c 为阴极面上的电场强度; B_0 为阴极面上的磁感应强度。

由(10)式出发,推导可得系统对称轴上电位分布 $\Phi(z)$ 和对称轴上磁感应强度分布 $B(z)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (-E_c) \frac{R_c z}{R_c + z}, \\ B(z) &= B_0 \frac{R_c^2}{(R_c + z)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式可表示为如下形式:

$$\Phi(z) = \frac{z}{nl - (n-1)z} \Phi_{ac}, \quad (12)$$

$$B(z) = \frac{n^2 l^2}{[nl - (n-1)z]^2} B_0, \quad (13)$$

式中: $n=R_c/R_a$, R_c 和 R_a 分别为同心球系统球面阴极和球面屏(阳极)的曲率半径,其值自曲率中心 O 算起,以电子行进的方向为正,反之则为负; l 为此二电极的极间距离, $l=R_a-R_c$; Φ_{ac} 为阳极相对于阴极的电位;电场强度 E_c 可表示为

$$E_c = \frac{\Phi_{ac}}{R_c(n-1)} = \frac{\Phi_{ac}}{-nl}. \quad (14)$$

E_c 指向阴极面方向, 无论 $n > 1$ 还是 $n < 1$, E_c 永取负值。对于复合电磁同心球系统而言, 球面阴极上的图像被转移到球面屏上, 于是 $n = 1/M$ 。

3.2 电子轨迹转角 $\chi(z, \epsilon_z)$ 的解析表示

求取近轴方程(1)式在轴上电位分布[(12)式]和轴上磁感应分布[(13)式]条件下的两个特解表达式。首先, 求旋转坐标系下的电子轨迹转角 $\chi(z, \epsilon_z)$ 。对(12)式作微分运算, 得

$$\Phi'(z) = (-E_c) \frac{(nl)^2}{[nl - (n-1)z]^2}. \quad (15)$$

由此对(13)式进行变换, 则 $B(z)$ 可表示为

$$B(z) = \Phi'(z) \frac{B_0}{-E_c}. \quad (16)$$

(16)式表明同心球系统下轴上电位分布与轴上磁感应分布之间的转换关系。正是通过(16)式的关键变换步骤, 才使(3)式的积分和电子光学近轴方程[(1)式]的求解成为可能。将(16)式代入(3)式中, 便可得到电子轨迹随旋转坐标系转过的角度 $\chi(z, \epsilon_z)$:

$$\chi(z, \epsilon_z) = \sqrt{\frac{e}{2m_0}} \frac{B_0}{-E_c} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} \frac{\Phi'(z)}{\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z}} dz. \quad (17)$$

积分之, 得

$$\chi(z, \epsilon_z) = \sqrt{\frac{e}{2m_0}} \frac{B_0}{(-E_c)} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}], \quad (18)$$

这里假定 $\chi_0 = \chi(z_0 = 0) = 0, \Phi(z_0 = 0) = 0$ 。

(18)式可写为更简洁的形式。令 $k^2 = \frac{e}{2m_0} \frac{B_0^2}{-E_c}$,

其量纲为 $1/l$, 代入(18)式, 有

$$\chi(z, \epsilon_z) = \frac{k}{\sqrt{-E_c}} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}]. \quad (19)$$

3.3 特解 $v(z, \epsilon_z)$ 的解析表示

先求(1)式的第一个特解 $v(z, \epsilon_z)$ 的解析表达式。我们知道, 特解 $v(z, \epsilon_z)$ 是随旋转坐标系一起转动的螺旋线。根据(19)式, 电子随旋转坐标系一起转动的转角可知。则可假定

$$v(z, \epsilon_z) = v_1(z, \epsilon_z) \sin \chi(z, \epsilon_z), \quad (20)$$

式中: $v_1(z, \epsilon_z)$ 为待求函数。

将(20)式代入(1)式的标量形式中,

$$v''(z) + \frac{1}{2} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z) + \epsilon_z} v'(z) + \frac{1}{4[\Phi(z) + \epsilon_z]} \times \left[\Phi''(z) + \frac{k^2}{-E_c} \Phi'^2(z) \right] v(z) = 0, \quad (21)$$

可得与 $\sin \chi(z, \epsilon_z)$ 和 $\cos \chi(z, \epsilon_z)$ 相关的项:

$$\left\{ 2v_1'(z, \epsilon_z) \chi'(z, \epsilon_z) + \left\{ \chi''(z, \epsilon_z) + \frac{\Phi'(z)}{2[\Phi(z) + \epsilon_z]} \chi'(z, \epsilon_z) \right\} v_1(z, \epsilon_z) \right\} \cos \chi(z, \epsilon_z) = 0, \quad (22)$$

$$\left\{ v_1''(z, \epsilon_z) + \frac{\Phi'(z)}{2[\Phi(z) + \epsilon_z]} v_1'(z, \epsilon_z) + \left\{ \frac{1}{4[\Phi(z) + \epsilon_z]} \left[\Phi''(z) + \frac{k^2}{-E_c} \Phi'^2(z) \right] - \chi'^2(z, \epsilon_z) \right\} v_1(z, \epsilon_z) \right\} \sin \chi(z, \epsilon_z) = 0. \quad (23)$$

很显然, 如果(22)式和(23)式成立, 则大括号内的系数应该分别等于零。

若将(19)式表示的转角 $\chi(z, \epsilon_z)$ 及其导数

$$\chi'(z, \epsilon_z) = \frac{k}{\sqrt{-E_c}} \frac{\Phi'(z)}{2\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z}}, \quad (24)$$

$$\chi''(z, \epsilon_z) = \frac{k}{\sqrt{-E_c}} \frac{\Phi''(z)}{2\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z}} - \frac{k}{\sqrt{-E_c}} \frac{\Phi'^2(z)}{4[\Phi(z) + \epsilon_z]^{3/2}} \quad (25)$$

代入(22)式大括号的系数中, 经过一系列化简, 便可得

$$2v_1'(z, \epsilon_z) \Phi'(z) + v_1(z, \epsilon_z) \Phi''(z) = 0. \quad (26)$$

鉴于同心球系统的电位分布[(12)式]满足

$$2 \left[1 - \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z \right] + \frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)} z = 0, \quad (27)$$

则由(27)式可将(26)式变为

$$\frac{v_1'(z, \epsilon_z)}{v_1(z, \epsilon_z)} z + \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z = 1. \quad (28)$$

由(28)式可以解得

$$v_1(z, \epsilon_z) = \frac{2z \sqrt{-E_c}}{k\Phi(z)}. \quad (29)$$

将 $v_1(z, \epsilon_z)$ 的解代入(23)式大括号的系数中, 同样可以证明(23)式也是成立的。

因此, 由(20)式得到第一个特解 $v(z, \epsilon_z)$ 的解析表达式为

$$v(z, \epsilon_z) = \frac{2z \sqrt{-E_c}}{k\Phi(z)} \sin \left\{ \frac{k}{\sqrt{-E_c}} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}] \right\}. \quad (30)$$

不难证明, (30)式满足第一个特解 $v(z, \epsilon_z)$ 的初始条件[(4)式]。

3.4 特解 $w(z, \epsilon_z)$ 的解析表示

同样可以仿照上述方法求第二个特解 $w(z, \epsilon_z)$

的解析表示。令

$$w_2(z, \epsilon_z) = w_1(z, \epsilon_z) \cos \chi(z, \epsilon_z), \quad (31)$$

式中: $w_1(z, \epsilon_z)$ 为待求函数。

将(31)式代入(1)式的标量形式中,便可获得与 $\sin \chi(z, \epsilon_z)$ 和 $\cos \chi(z, \epsilon_z)$ 相关的系数项,它们应分别等于零:

$$-2w_1'(z, \epsilon_z)\chi'(z, \epsilon_z) - w_1(z, \epsilon_z) \times \left[\chi''(z, \epsilon_z) + \frac{1}{2} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z) + \epsilon_z} \chi'(z, \epsilon_z) \right] = 0, \quad (32)$$

$$w_1''(z, \epsilon_z) + \frac{1}{2} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z) + \epsilon_z} w_1'(z, \epsilon_z) + \left\{ -\chi'^2(z, \epsilon_z) + \frac{1}{4[\Phi(z) + \epsilon_z]} \times \left[\Phi''(z) + \frac{e}{2m_0} B^2(z) \right] \right\} w_1(z, \epsilon_z) = 0. \quad (33)$$

(32)式经过一系列化简,可以得到类似(26)式的表达式:

$$2w_1'(z, \epsilon_z)\Phi'(z) + w_1(z, \epsilon_z)\Phi''(z) = 0. \quad (34)$$

由同心球系统的电位分布[(12)式]满足的关系式[(27)式],对(34)式进行变换,有

$$\frac{w_1'(z, \epsilon_z)}{w_1(z, \epsilon_z)} z + \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z = 1. \quad (35)$$

令

$$w_1(z, \epsilon_z) = 1 + \frac{z}{R_c}, \quad w_1'(z, \epsilon_z) = \frac{1}{R_c}, \quad (36)$$

不难证明(35)式是成立的。其解可表示为

$$w_2(z, \epsilon_z) = \left(1 + \frac{z}{R_c} \right) \cos \left\{ \frac{k}{\sqrt{-E_c}} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}] \right\}, \quad (37)$$

但其满足下列初条件:

$$w_2(z=0) = 1, \quad w_2'(z=0) = \frac{1}{R_c}. \quad (38)$$

在此假设下,同样可以证明朗斯基行列式[(6)式]成立,即

$$\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} (v'w_2 - vw_2') = 1. \quad (39)$$

(37)式表示的 $w_2(z, \epsilon_z)$ 虽是(1)式的一个特解,但它并不满足所要求的特解初条件[(5)式]。为使特解 $w(z, \epsilon_z)$ 既满足初条件[(5)式]的假设,又满足朗斯基行列式[(6)式],我们将近轴方程[(1)式]的第二个特解 $w(z, \epsilon_z)$ 表示为

$$w(z, \epsilon_z) = w_2(z, \epsilon_z) - \frac{\sqrt{\epsilon_z}}{R_c} v(z, \epsilon_z). \quad (40)$$

上文已经证明了特解 $w_2(z, \epsilon_z)$ 、 $v(z, \epsilon_z)$ 分别

满足近轴方程[(1)式],因此,它们组合成的新特解 $w(z, \epsilon_z)$ 将必然满足近轴方程。检验(40)式,可知其满足初条件[(5)式]。

同样,不难证明(30)式和(40)式表示的 $v(z, \epsilon_z)$ 、 $w(z, \epsilon_z)$ 在满足(4)式和(5)式初条件的同时,其朗斯基行列式[(6)式]

$$\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} (v'w - vw') = \sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} \times \left[v' \left(w_2 - \frac{\sqrt{\epsilon_z}}{R_c} v \right) - v \left(w_2' - \frac{\sqrt{\epsilon_z}}{R_c} v' \right) \right] = 1 \quad (41)$$

也是成立的。则第二个特解 $w(z, \epsilon_z)$ 可表示为

$$w(z, \epsilon_z) = \left(1 + \frac{z}{R_c} \right) \cos \left\{ \frac{k}{\sqrt{-E_c}} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}] \right\} - \frac{\sqrt{\epsilon_z}}{R_c} \frac{2z\sqrt{-E_c}}{k\Phi(z)} \sin \left\{ \frac{k}{\sqrt{-E_c}} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}] \right\}. \quad (42)$$

由此,我们首次严格地推导得到复合电磁同心球系统中两个特解 $v(z, \epsilon_z)$ 、 $w(z, \epsilon_z)$ 在 $\epsilon_z \neq 0$ 下的精确解析表达式[(30)式和(42)式]。

当 $\epsilon_z = 0$ 时,特解 $v(z, \epsilon_z)$ 、 $w(z, \epsilon_z)$ 表达式[(30)式和(42)式]及转角 $\chi(z)$ 表达式[(19)式]便可简化为

$$\begin{cases} v(z) = \frac{2z\sqrt{-E_c}}{k\Phi(z)} \sin \left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}} \sqrt{\Phi(z)} \right], \\ w(z) = \left(1 + \frac{z}{R_c} \right) \cos \left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}} \sqrt{\Phi(z)} \right], \end{cases} \quad (43)$$

$$\chi(z) = \frac{k}{\sqrt{-E_c}} \sqrt{\Phi(z)}. \quad (44)$$

(43)式即文献[11]中的(1.99)式和(1.100)式,它实际上是近轴轨迹的零级近似解,乃是本文结果的一个特例。

4 复合电磁同心球系统的近轴成像性质

由(30)式可知,对复合电磁同心球系统,自阴极面逸出的电子轨迹是一条螺距不等的圆锥螺旋线。根据(19)式我们不难确定对应于 $\epsilon_z = \epsilon_{z1}$ 的各个成像点 z_m ($m=1, 2, 3, \dots$) 的位置。显然,成像条件为 $\sin \chi(z_m, \epsilon_{z1}) = 0$, 即

$$\frac{k}{\sqrt{-E_c}} \left[\sqrt{\frac{z_m}{nl} - (n-1)z_m \Phi_{ac} + \epsilon_{z1}} - \sqrt{\epsilon_{z1}} \right] = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots, i, \quad (45)$$

式中: m 为圈数。

由(45)式可知, 不管逸出电子的径向初电位 ϵ_r 如何, 只要其沿主轨迹的电子轴向初电位 ϵ_z 等于 ϵ_{z1} , 便能实现理想聚焦。

显然, 根据(30)式, 当 $\chi = [(2m-1)/2]\pi$ 时, 电子轨迹螺旋线在 z_j 处取极值 r_{jm}^* (极大或极小), 即

$$r_{jm}^* = r^*(z_j) = 2\sqrt{\frac{2m_0}{e} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{B_0} \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z_j}{l}\right)},$$

$$j = \frac{2m-1}{2}. \quad (46)$$

只需将(45)式中的 m 以 $(2m-1)/2$ 置换即可求得 z_j 值。由(46)式可见, r_{jm}^* 依赖于 l, n, z_j 以及电子的径向初电位 ϵ_r , 与 B_0 成反比, 且随着 z_j 值的增大而减小(当 $n > 1$ 时)或增大(当 $n < 1$ 时), 从而形成圆锥螺旋线, 如图 1(d) 所示。

设电子自球面阴极的中心物点逸出, 以 2θ 表示此圆锥螺旋线相邻波腹的连线与中心轴之间的夹角, 则有

$$\tan 2\theta = \frac{r_{j+1}^* - r_j^*}{z_{j+1} - z_j} = -2\sqrt{\frac{2m_0}{e} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{B_0} \frac{n-1}{nl}} =$$

$$2\sqrt{\frac{2m_0}{e} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{B_0} \frac{1}{R_c}} = \text{const.} \quad (47)$$

由此可见, 当 $n > 1$ 或 R_c 为负值时, $\tan 2\theta$ 为负值, 表示回转半径逐步减小; 当 $n < 1$ 或 R_c 为正值时, $\tan 2\theta$ 为正值, 表示回转半径逐步增大。

圆锥螺旋线相邻两个波腹之间的距离为

$$\Delta z_j = z_{j+1} - z_j =$$

$$\frac{4m \frac{m_0}{e} - \frac{E_c}{B_0^2} \pi^2}{\left\{1 + (n-1) \frac{4m^2 + 1}{4} \left[\frac{1}{\Phi_{ac}} \frac{2m_0}{e} \frac{(-E_c)^2}{B_0^2} \pi^2\right]\right\}^2} \quad (48)$$

这表明当 $n > 1$ 或 R_c 为负值时 Δz_j 减小, 当 $n < 1$ 或 R_c 为正值时 Δz_j 增大。

根据(45)式可求得第 i 圈时与 ϵ_{z1} 相对应的理想成像位置 z_i , 光阴极与屏面之间的极间距离 l 可表示为

$$z_i = l = \sqrt{\frac{2m_0}{e} \frac{i\pi}{nB_0} (\sqrt{\Phi_{ac} + \epsilon_{z1}} + \sqrt{\epsilon_{z1}})}. \quad (49)$$

实际上, 这一类成像系统往往采用很强的加速电场, 因此, 电子到达像面的速度较轴向初速大得多。若略去(49)式中的 ϵ_{z1} 项, 则极间距离 l 可以用第 i 圈聚焦的极限像面位置 z_i 近似表示为

$$z_i = l \approx i\pi \sqrt{\frac{2m_0}{e} \frac{\sqrt{\Phi_{ac}}}{nB_0}}. \quad (50)$$

如果给定 n, l, i , 则可确定 $\sqrt{\Phi_{ac}}/B_0$ 值。

在像面位置 $z_i = l$ 处, $\sin \chi(z_i, \epsilon_{z1}) = 0$, $\cos \chi(z_i, \epsilon_{z1}) = (-1)^i$ 。根据(30)式可得

$$v'(z_i = l) = \frac{n}{\sqrt{\Phi_{ac} + \epsilon_{z1}}} (-1)^i. \quad (51)$$

线放大率为 $M=1/n$, 则角放大率

$$\Gamma = \frac{v'(z_i)}{v'(z_0)} (-1)^i, \quad (52)$$

可证明拉格朗日-亥姆霍兹关系式

$$M\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_{z1}}}{\sqrt{\Phi_{ac} + \epsilon_{z1}}} \quad (53)$$

在复合电磁同心球系统中依然成立。

文献[1]中曾给出了复合电磁聚焦像管(缩小管, $M=1/5$; 放大管, $M=5$)的计算示例。

5 几种特殊情况

5.1 均匀平行复合电磁系统

对于复合电磁同心球系统, 令 R_c 和 R_a 都趋于无穷大, 即 $n=1$, 球面阴极和球面屏便变成平面阴极和平面屏, 系统转化为通常放大率等于 1 的均匀平行复合电磁系统, 又称长磁阴极透镜, 如图 1(b)

所示。在此情况下, $\Phi(z) = \frac{\Phi_{ac}}{l} z = -E_c z$, $-E_c =$

$\frac{\Phi_{ac}}{l} = \text{const.}$, $B(z) = B_0 = \text{const.}$, $\frac{1}{R_c} = 0$ 。则根据

(19)式、(30)式和(42)式, 不难得到均匀平行复合电磁系统中电子轨迹转角 $\chi(z, \epsilon_z)$ 和特解 $v(z, \epsilon_z)$, $w(z, \epsilon_z)$ 的表达式:

$$\chi(z, \epsilon_z) = \frac{k}{\sqrt{-E_c}} (\sqrt{-E_c z + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}), \quad (54)$$

$$v(z, \epsilon_z) =$$

$$\frac{2}{k \sqrt{-E_c}} \sin \left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}} (\sqrt{-E_c z + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}) \right], \quad (55)$$

$$w(z, \epsilon_z) = \cos \left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}} (\sqrt{-E_c z + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}) \right]. \quad (56)$$

由此可见, 在该系统中, 电子在轴向作等加速运动, 以径向速度 \dot{r}_0 作等速圆周运动, 其回转半径 $r_j =$

$2 \frac{m_0 \dot{r}_0}{e B_0}$, 回转周期 $T = 2\pi \frac{m_0}{e B_0}$, 故电子轨迹描绘的

是一条螺距逐渐增大的圆柱螺旋线。

各级成像点的位置可表示为

$$z_m = \dot{z}_0(mT) + \frac{1}{2} \frac{-E_c}{m_0} (mT)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (57)$$

理想像面位置对应为

$$z_i = l = \frac{i\pi}{k\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\Phi_{ac} + \epsilon_{z1}} + \sqrt{\epsilon_{z1}}). \quad (58)$$

5.2 静电两电极同心球系统

作者在一系列文章和著作中研究过静电两电极同心球系统的特解^[2-5,10]。这里,它作为复合电磁同心球系统的一个特例,可以获得相同的结果。

在复合电磁同心球系统中,若磁场不存在时, $B(z)=0$,即 $k=0$,便得到静电两电极同心球系统。可分为三种情况,即 $n < 1, 1 < n < 2, n > 2$,如图1(c)所示。其轴上电位分布为 $\Phi(z) = (-E_c) \frac{R_c z}{R_c + z}$ 。根据(19)式, $\chi(z) = 0, \sin \chi(z) = 0, \cos \chi(z) = \pm 1$,其电子轨迹为平面曲线。

因为

$$\lim_{\chi(z)=0} \frac{\sin \chi(z)}{\chi(z)} = 1, \quad (59)$$

由(30)式和(42)式,不难得到两特解的表达式为

$$v(z, \epsilon_z) = \frac{2z}{\Phi(z)} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}], \quad (60)$$

$$w(z, \epsilon_z) = 1 + \frac{z}{R_c} - \frac{\sqrt{\epsilon_z}}{R_c} \frac{2z}{\Phi(z)} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}]. \quad (61)$$

其导数为

$$v'(z, \epsilon_z) = \frac{2}{\Phi(z)} \frac{z}{R_c + z} [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}] + \frac{R_c}{(R_c + z) \sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z}}, \quad (62)$$

$$w'(z, \epsilon_z) = \frac{1}{R_c} - \frac{\sqrt{\epsilon_z}}{R_c} \left\{ \frac{2}{\Phi(z)} \frac{z}{R_c + z} \times [\sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}] + \frac{R_c}{(R_c + z) \sqrt{\Phi(z) + \epsilon_z}} \right\}. \quad (63)$$

不难证明此两特解[(60)式和(61)式]同样满足初条件[(4)式和(5)式],且朗斯基行列式[(6)式]成立。

由(62)式可知,只有当 $R_c < 0$ 且 $z > -R_c/2$ 时, $v'(z, \epsilon_z) < 0$,轴上点逸出的电子轨迹偏折向轴,系统才具有成实像的可能性。

5.3 静电近贴系统

对于静电两电极同心球系统,若假定 R_c 和 R_a 都趋于无穷大, $1/R_c = 0, 1/R_a = 0$,即 $n = 1$,则球面阴极和球面屏变成平面阴极和平面屏,于是成为静电近贴系统,如图1(a)所示。其轴上电位分布为 $\Phi(z) = (-E_c)z, \Phi'(z) = -E_c = \Phi_{ac}/l = \text{const.}$ 。

该系统中,径向运动的电子没有受到场的作用,故电子的径向速度始终不变, $\dot{r} = \dot{r}_0 = \text{const.}$ 。轴向受到匀强场的作用,故电子的轴向速度为

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2e}{m_0}(-E_c z + \epsilon_z)}. \quad (64)$$

轴向速度随着与阴极面距离 z 的平方根增大而增大,电子轨迹为一条抛物线。由(60)式和(61)式可得二特解的表达式为

$$v(z, \epsilon_z) = \frac{2}{-E_c} (\sqrt{-E_c z + \epsilon_z} - \sqrt{\epsilon_z}), \quad (65)$$

$$w(z, \epsilon_z) = 1. \quad (66)$$

关于匀强场电子光学特性的进一步描述,可参阅文献[10]。

6 结束语

对于复合电磁同心球系统,由阴极面逸出的电子轨迹的求解一直是众多研究者关心的问题。通过该系统电位分布与磁感应分布之间的相互变换,首次巧妙地解决了求解电子光学近轴方程——二阶齐次线性微分方程两个特解的解析解的问题,导出了电子轨迹转角和两特解的精确表达式,探讨了近轴成像性质,并将结果推广到静电同心球系统、均匀平行复合电磁系统和静电近贴系统。本文结果为进一步研究复合电磁成像系统的近轴像差理论奠定了基础。

参 考 文 献

- [1] Chou L W. Electron optics of concentric spherical electromagnetic focusing systems[J]. Advances in Electronics and Electron Physics, 1979, 52: 119-132.
- [2] Zhou L W, Gong H, Zhang Z Q, et al. On electron-optical spatial and temporal aberrations in a bi-electrode spherical concentric system with electrostatic focusing[J]. Proceedings of SPIE, 2009, 7384: 738435.
- [3] Zhou L W, Gong H, Zhang Z Q, et al. Static and dynamic imaging electron-optics and spatial-temporal aberrations in a bi-electrode spherical concentric system with electrostatic focusing[J]. Optik, 2011, 122(4): 287-294.

- [4] Zhou L W, Gong H, Zhang Z Q, *et al.* Paraxial imaging electron optics and its spatial-temporal aberrations for a bi-electrode concentric spherical system with electrostatic focusing[J]. *Optik*, 2011, 122(4): 295-299.
- [5] Zhou L W, Gong H. Theory of paraxial lateral aberrations of electrostatic imaging electrostatic electron optics based on asymptotic solutions and its verification[J]. *Optik*, 2011, 122(4): 300-306.
- [6] Beurle R L, Wreathall W M. Aberration in magnetic focus systems[J]. *Advances in Electronics and Electron Physics*, 1962, 16: 333-340.
- [7] Zachrov B. A demagnifying image tube for nuclear physics applications[J]. *Advances in Electronics and Electron Physics*, 1962, 16: 99-104.
- [8] Picat J P. Optical property of electromagnetically focused electronic cameras[J]. *Astronomy and Astrophysics*, 1971, 11: 257-267.
- [9] Smirnov N A, Monastyrski M A, Kulikov Yu V. Some problems on electron optics for cathode lenses of combined fields with spherical symmetry[J]. *Journal of Technical Physics*, 1979, 48(2): 2590-2595.
- [10] Zhou L W. *Electron optics with wide beamfocusing*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1993. 周立伟. 宽束电子光学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1993.
- [11] E'lin V P, Kateshowv V A, Kulikov Yu V, *et al.* Numerical methods of optimization for emissive electron optical systems[M]. Siberia: Press Science, 1987.