·中文译本·

复合电磁同心球系统的成像电子光学. B 章:近轴像差

周立伟*
北京理工大学光电学院, 北京 100081

摘要 由复合电磁同心球系统的近轴方程两个特解出发,通过展开理想成像位置处图像转角表达式的途径,探讨了复合电磁同心球系统的近轴纵向像差和近轴横向像差。主要贡献是求得了近轴方程的两个特解在理想像面位置处的解析表达式,由此证明决定极限空间分辨率的二级近轴色球差能以 Recknagel-Artimovich 公式描述。导出了近轴横向像差的表达式,该像差由近轴色球差、近轴放大率色差和近轴各向异性色差等组成。

关键词 成像系统; 成像电子光学系统; 复合电磁阴极透镜; 复合电磁同心球系统; 近轴方程的求解; 电子光学的近轴像差

中图分类号 O463 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201939.0411002

Imaging Electron Optics of a Combined Electromagnetic Concentric Spherical System. Part B: Paraxial Aberrations

Zhou Liwei*
School of Optics & Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, *China*

Abstract Starting from the two special solutions of the paraxial equation of the combined electromagnetic concentric spherical system, the paraxial longitudinal and lateral aberrations of the combined electromagnetic concentric spherical system have been explored by expanding the representation of the image rotation angle at the ideal imaging position. The main contribution of this paper is to obtain the analytical expression of the two special solutions of paraxial equation at ideal image plane, and it has proved that the paraxial spherical-chromatic aberration of second order that determines the limited spatial resolution of imaging can still be characterized in terms of the Recknagel-Artimovich formula. Expressions of the paraxial lateral aberration composed of paraxial spherical-chromatic aberration, paraxial magnification chromatic aberration, and paraxial anisotropic chromatic aberration have been deduced.

Key words imaging systems; electron optical imaging systems; combined electromagnetic cathode lenses; combined electromagnetic concentric spherical systems; solutions of paraxial equation; paraxial aberration of electron optics

OCIS codes 110.2990; 260.2110; 230.0250

1 引 言

对于静电两电极同心球系统,业已证明,决定系统极限空间分辨率的二级近轴横向色球差可以莱克纳格尔—阿尔齐莫维奇(Recknagel-Artimovich)公式(简称 R-A 公式)描述[1-3]。此外,我们早已证明 R-A 公式在一般静电电子光学成像系统中依然成立[3]。这表明它在静电成像系统的成像质量评价中具有普遍意义。但是,在复合电磁电子光学成像系统中,近轴色球差及其他各项特殊类型的近轴横向像差对图像质量的影响如何,磁场的引入对系统近轴横向像差的影响究竟有多大,R-A 公式是否成立等问题,都值得思考并且需要给予清晰的回答。

文献[1]给出了复合电磁成像系统中近轴轨迹 $r^*(z,\varepsilon_z)$ 的一般表达式:

$$\boldsymbol{r}^*(z,\varepsilon_z)=\boldsymbol{r}_0 w(z,\varepsilon_z)\exp[\mathrm{j}\chi(z,\varepsilon_z)]+\left[\sqrt{\frac{m_0}{2e}}\dot{\boldsymbol{r}}_0-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_0)\sqrt{\frac{e}{8m_0}}B_0\right]\times v(z,\varepsilon_z)\exp[\mathrm{j}\chi(z,\varepsilon_z)], \tag{1}$$

收稿日期: 2018-09-04; **修回日期**: 2018-10-23; **录用日期**: 2018-11-08

* **E-mail**: zhoulw@vip.sina.com

式中：$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$；$\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 分别表示电子自阴极面逸出时的始位置矢量及径向初速矢量；$\boldsymbol{k}$ 为沿 z 轴正方向的单位矢量；ε_z 为与逸出电子轴向初能对应的轴向初电位；e/m_0 为电子荷质比；B_0 为阴极面上的磁感应强度；星号“$*$”表示近轴情况。

(1)式中，$v=v(z,\varepsilon_z)$ 和 $w=w(z,\varepsilon_z)$ 为电子光学近轴方程的两个特解，其初条件可表示为

$$v(z=0)=0,\ v'(z=0)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}},\tag{2}$$

$$w(z=0)=1,\ w'(z=0)=0。\tag{3}$$

此二特解还必须满足朗斯基行列式：

$$\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}\,(v'w-vw')=1。\tag{4}$$

令 $\chi(z,\varepsilon_z)$ 表示自阴极面逸出的电子转过的角度，即旋转坐标系 (x,y) 相对于固定坐标系 (X,Y) 转过的角度：

$$\chi(z,\varepsilon_z)=\int_{z0}^{z}\sqrt{\frac{e}{8m_0}}\ \frac{B(z)}{\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}}+\chi_0。\tag{5}$$

通常假定 $\chi_0=\chi(z=0)=0$。

令与 ε_{z1} 相对应的理想像面 $z=z_{\mathrm{i}}$ 上，$v(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_{z1})=0$，$\chi(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_{z1})=i\pi$，其中 i 为逸出电子旋转的圈数。则由(1)式可得

$$\boldsymbol{r}^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_{z1})=\boldsymbol{r}_0w(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_{z1})=\boldsymbol{r}_0M,\tag{6}$$

式中：M 为近轴成像位置 $z=z_{\mathrm{i}}$ 处理想像面上的线放大率。

在理想像面位置 z_{i} 处，近轴横向像差 $\Delta\boldsymbol{r}^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)$ 定义为[4]

$$\Delta\boldsymbol{r}^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)=\boldsymbol{r}^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)-\boldsymbol{r}^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_{z1})。\tag{7}$$

根据(1)式，(7)示可表示为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)=&\sqrt{\frac{m_0}{2e}}\dot{\boldsymbol{r}}_0v(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)\exp[\mathrm{j}\chi(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)]+\\&\boldsymbol{r}_0\{w(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)\exp[\mathrm{j}\chi(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)]-M\}-\\&(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_0)\sqrt{\frac{e}{8m_0}}B_0v(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)\exp[\mathrm{j}\chi(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)]=\\&\Delta\boldsymbol{r}_v^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)+\Delta\boldsymbol{r}_w^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)+\Delta\boldsymbol{r}_u^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z),\end{aligned}\tag{8}$$

式中：$\Delta\boldsymbol{r}_v^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)$，$\Delta\boldsymbol{r}_w^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)$，$\Delta\boldsymbol{r}_u^*(z_{\mathrm{i}},\varepsilon_z)$ 分别称为近轴色球差、近轴放大率色差和近轴各向异性色差。

(8)式是我们研究复合电磁同心球系统近轴横向像差的出发点。在文献[1]中已导出其特解 $v(z,\varepsilon_z)$，$w(z,\varepsilon_z)$ 及转角 $\chi(z,\varepsilon_z)$ 的精确解析表达式。本文试图获得复合电磁同心球系统中近轴横向像差的解析表达式，以便精确分析各种特殊类型的近轴横向像差对系统成像质量的影响。

与静电两电极同心球系统的研究类似，由复合电磁同心球系统导出的近轴成像和像差的形成规律对研究一般复合电磁成像系统的成像与像差具有普遍的指导意义，这正是本文的研究目的。

2 基本公式

对于复合电磁同心球系统，设电场强度 $\boldsymbol{E}$ 垂直于球面阴极，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 处处平行。电位分布 $\Phi(z)$ 和磁感应强度分布 $B(z)$ 可以分别表示为[5]

$$\Phi(z)=\frac{z}{nl-(n-1)z}\Phi_{\mathrm{ac}},\tag{9}$$

$$B(z)=\frac{n^2l^2}{[nl-(n-1)z]^2}B_0,\tag{10}$$

式中：$n=R_{\mathrm{c}}/R_{\mathrm{a}}$，$R_{\mathrm{c}}$ 和 R_{a} 分别为复合电磁同心球系统球面阴极和球面屏(阳极)的曲率半径，其值自曲率中心算起，以电子行进的方向为正，反之为负；l 为此二电极的极间距离，$l=R_{\mathrm{a}}-R_{\mathrm{c}}$；$\Phi_{\mathrm{ac}}$ 为阳极相对于阴极的电位；B_0 为阴极面处的磁感应强度。

文献[4]中我们已推导得到该系统的电子光学近轴方程的两个特解 $v(z,\varepsilon_z)$ 和 $w(z,\varepsilon_z)$ 的解析表达式为

$$\begin{aligned}v(z,\varepsilon_z)=&\frac{2z\sqrt{-E_{\mathrm{c}}}}{k\Phi(z)}\times\\&\sin\left\{\frac{k}{\sqrt{-E_{\mathrm{c}}}}\left[\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_z}\right]\right\},\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}w(z,\varepsilon_z)=&\left(1+\frac{z}{R_{\mathrm{c}}}\right)\times\\&\cos\left\{\frac{k}{\sqrt{-E_{\mathrm{c}}}}\left[\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_z}\right]\right\}-\\&\frac{\sqrt{\varepsilon_z}}{R_{\mathrm{c}}}\ \frac{2z\sqrt{-E_{\mathrm{c}}}}{k\Phi(z)}\sin\left\{\frac{k}{\sqrt{-E_{\mathrm{c}}}}\left[\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_z}\right]\right\},\end{aligned}\tag{12}$$

式中：$k^2=\dfrac{e}{2m_0}\dfrac{B_0^2}{-E_{\mathrm{c}}}$，其量纲为 $\dfrac{1}{l}$；E_{c} 为阴极面上的电场强度，可表示为

$$E_{\mathrm{c}}=\frac{\Phi_{\mathrm{ac}}}{R_{\mathrm{c}}(n-1)}=\frac{\Phi_{\mathrm{ac}}}{-nl}。\tag{13}$$

E_{c} 指向阴极面方向，无论 $n>1$ 还是 $n<1$，E_{c} 永取负值。此二特解[(11)式和(12)式]满足初条件[(2)式和(3)式]，并同时满足朗斯基行列式[(4)式]。

由于磁场的影响，自阴极面逸出的电子在行进过程中转过的角度 $\chi(z,\varepsilon_z)$ 可表示为

$$\chi(z,\varepsilon_z)=\frac{k}{\sqrt{-E_c}}[\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_z}]。\quad(14)$$

由(8)式可知，求解近轴横向像差 $\Delta \boldsymbol{r}^*(z_i,\varepsilon_z)$ 可归结为求两个特解 $v(z,\varepsilon_z)$，$w(z,\varepsilon_z)$ 以及电子转角 $\chi(z,\varepsilon_z)$ 在像面位置 $z=z_i$ 处的值。根据求得的各种类型近轴横向像差 $\Delta \boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)$，$\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)$，$\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)$ 的解析表达式，便可定量分析每一特殊类型的近轴横向像差对成像质量的影响。

3 复合电磁同心球系统的近轴纵向色差

在讨论近轴横向像差 $\Delta \boldsymbol{r}^*(z_i,\varepsilon_z)$ 之前，先研究近轴纵向色差 Δz^* 的解析表示。在电子光学中，近轴纵向色差的探讨不但对研究景深很有意义，并能由此研究阴极面轴上初始物点逸出的不同初能的电子的轴向离散。令自阴极面初始物点逸出的轴向初电位为 $\varepsilon_z=\varepsilon_{z1}$ 的电子，在电场和磁场共同作用下，经轴向加速并绕轴旋转，经历 i 圈圆锥螺旋式旋转，交于理想像面位置 $z_i=l$ 处。该成像位置由 $v(z_i,\varepsilon_{z1})=0$ 确定。根据(14)式，令 $\chi(z_i,\varepsilon_{z1})=i\pi$，可解得理想像面位置的表达式为

$$z_i=l=i\pi\frac{\sqrt{\Phi_{ac}}}{kn\sqrt{-E_c}}\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)。\quad(15)$$

由同一原点逸出的另一条近轴轨迹，其轴向初电位为 ε_z(但 $\varepsilon_z\neq\varepsilon_{z1}$)，则交于像面位置 $z_i=l$ 邻近的 z_{i*} 处，z_{i*} 可由下式确定[4-5]：

$$\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\left[\sqrt{\frac{z_{i*}}{nl-(n-1)z_{i*}}\Phi_{ac}+\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_z}\right]=i\pi。\quad(16)$$

由(16)式出发，利用(15)式，可解得 z_{i*} 的表达式为

$$z_{i*}=i\pi\frac{\sqrt{\Phi_{ac}}}{k\sqrt{-E_c}}\times\frac{\sqrt{1+\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}+2\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}}{1+(n-1)\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}+2\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}\right)}。\quad(17)$$

近轴纵向色差 Δz^* 可定义为

$$\Delta z^*=z_{i*}-z_i=z_{i*}-l。\quad(18)$$

展开(15)式和(17)式，略去高于 $\sqrt{\varepsilon_z}/\sqrt{\Phi_{ac}}$ 的二阶以上的高阶小量，则 $z_i=l$ 与 z_{i*} 可表示为

$$z_i=l=i\pi\frac{\sqrt{\Phi_{ac}}}{nk\sqrt{-E_c}}\left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}+\frac{\varepsilon_{z1}}{2\Phi_{ac}}\right),\quad(19)$$

$$z_{i*}=i\pi\frac{\sqrt{\Phi_{ac}}}{nk\sqrt{-E_c}}\times\left[1-\frac{2(n-1)}{n}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)-\frac{4(n-1)}{n^2}\times\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)^2-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}+2\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}+\frac{\varepsilon_{z1}}{2\Phi_{ac}}\right]。\quad(20)$$

根据(13)式可将(15)式变换为

$$\frac{i\pi}{k}=\frac{1}{\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\Phi_{ac}+\varepsilon_{z1}}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})。\quad(21)$$

(21)式表示在理想成像时磁感应强度 B_0 与电场强度 E_c 及电位 Φ_{ac} 间的对应关系。将(21)式代入(20)式中，展开，略去高于 $\sqrt{\varepsilon_z}/\sqrt{\Phi_{ac}}$ 和 $\sqrt{\varepsilon_{z1}}/\sqrt{\Phi_{ac}}$ 的二阶以上的高阶小量，并考虑线放大率 $M=1/n$，由(18)式，可得近轴纵向色差 Δz^* 的表达式为

$$\Delta z^*=\Delta z_1^*+\Delta z_2^*,\quad(22)$$

式中：

$$\Delta z_1^*=\frac{2M^2}{E_c}\sqrt{\Phi_{ac}}(\sqrt{\varepsilon_{z1}}-\sqrt{\varepsilon_z}),\quad(23)$$

$$\Delta z_2^*=\frac{-4M^2(1-M)}{E_c}\sqrt{\varepsilon_z}(\sqrt{\varepsilon_{z1}}-\sqrt{\varepsilon_z}),\quad(24)$$

Δz_1^* 和 Δz_2^* 分别称为一级近轴纵向色差和二级近轴纵向色差。虽然从复合电磁同心球系统解析解中导出，但近轴纵向色差表达式中并不出现磁感应强度项 B_0。此外，一级近轴纵向色差的表达式与静电两电极同心球系统完全一致[2,4]。这一结果加深了人们对宽束电子光学系统成像特性的理解，对设计者选择何种类型的宽电子束成像系统具有重要意义。

从物理意义角度分析，这是很好理解的。在复合电磁同心球系统中，电子轨迹圆锥螺旋线的形成主要是电场使电子轴向加速行进和磁场使电子绕对称轴旋转的共同作用。轴向行进的电子由于轴向电子初能的差异经电场的轴向加速，发生了离散，从而形成近轴纵向色差。但磁场仅发挥了使电子轨迹绕对称轴旋转的作用，对近轴纵向色差贡献很小是很自然的。

4 复合电磁同心球系统的近轴横向像差

4.1 近轴色球差

在近轴纵向色差 Δz^* 的基础上，首先讨论近轴色球差 $\Delta \boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)$。由(8)式，$\Delta \boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)$ 可表示为

$$\Delta \boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)=\sqrt{\frac{m_0}{2e}}\dot{\boldsymbol{r}}_0 v(z_i,\varepsilon_z)\exp[j\chi(z_i,\varepsilon_z)]。\quad(25)$$

由(11)式可知,当 $\varepsilon_z=\varepsilon_{z1}$时,在理想像面 $z_i=l$ 处,有

$$v(z_i,\varepsilon_{z1})=\frac{2}{nk\sqrt{-E_c}}\sin\chi(z_i,\varepsilon_{z1})=\frac{2}{nk\sqrt{-E_c}}\times\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi_{ac}}\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)\right]=0。\quad(26)$$

当 $\varepsilon_z\neq\varepsilon_{z1}$时,特解 $v(z_i,\varepsilon_z)$在理想像面 $z_i=l$ 处不等于零,即

$$v(z_i,\varepsilon_z)=\frac{2}{nk\sqrt{-E_c}}\sin\chi(z_i,\varepsilon_z)=\frac{2}{nk\sqrt{-E_c}}\times\sin\left\{\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi_{ac}}\left[\sqrt{\frac{z_i}{nl-(n-1)z_i}+\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}\right]\right\}\neq 0。\quad(27)$$

因此,所有具有相同轴向初能 $\varepsilon_z(\varepsilon_z\neq\varepsilon_{z1})$的电子将交于与 $z_i=l$ 相邻近的位置 z_{i*} 处,即

$$v(z_{i*},\varepsilon_z)=\frac{2}{nk\sqrt{-E_c}}\sin\chi(z_{i*},\varepsilon_z)=\frac{2}{nk\sqrt{-E_c}}\times\sin\left\{\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi_{ac}}\left[\sqrt{\frac{z_{i*}}{nl-(n-1)z_{i*}}+\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}\right]\right\}=0。\quad(28)$$

由上可知,求特解 $v(z_i,\varepsilon_z)$的关键在于能否找出图像的转角 $\sin\chi(z_i,\varepsilon_z)$值。根据(18)式可得

$$z_i=l=z_{i*}-\Delta z^*。\quad(29)$$

将其代入(27)式 $\sin\chi(z_i,\varepsilon_z)$中,有

$$\sin\chi(z_i,\varepsilon_z)=\sin\left\{\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi_{ac}}\times\left[\sqrt{\frac{z_{i*}-\Delta z^*}{nl-(n-1)(z_{i*}-\Delta z^*)}+\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}\right]\right\}。\quad(30)$$

展开(30)式,利用(28)式以及求得的 l,z_{i*},Δz^* 的表达式[(19)式、(20)式和(22)式],略去高于 $\sqrt{\varepsilon_z}/\sqrt{\Phi_{ac}}$ 和$\sqrt{\varepsilon_{z1}}/\sqrt{\Phi_{ac}}$的二阶以上的高阶小量,经过繁琐的运算,可得

$$\sin\chi(z_i,\varepsilon_z)\simeq\chi(z_i,\varepsilon_z)=\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi_{ac}}\times\left[-\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}-\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}\right)\right]。\quad(31)$$

将其代入(27)式中,可得特解 $v(z,\varepsilon_z)$在理想像面位置的表达式为

$$v(z_i,\varepsilon_z)=\frac{2M}{E_c}\left[(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})-\frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ac}}}(\varepsilon_z-\varepsilon_{z1})\right]。\quad(32)$$

(32)式是成像电子光学中非常重要的一个表达式,它传递了非常特殊的信息,即特解 $v(z_i,\varepsilon_z)$在像面处仅与线放大率 M、阴极面的电场强度 E_c 和像面处施加的电位 Φ_{ac}相关,而与磁感应强度 B_0 无关。(32)式表明,$v(z_i,\varepsilon_z)$值是一个一级近似的小量。尽管特解 $v(z,\varepsilon_z)$在各个位置 z 处取不同的值,但在 $z=z_i$ 处将取(32)式的值。特别要指出的是,(32)式是在宽束电子光学中普遍成立的。

因此,以(25)式表示的复合电磁同心球系统的近轴横向色球差 $\Delta\boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)$可表示为

$$\Delta\boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)=\frac{2M}{E_c}\sqrt{\frac{m_0}{2e}}\dot{\boldsymbol{r}}_0\left[(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})-\frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ac}}}(\varepsilon_z-\varepsilon_{z1})\right]\exp[\mathrm{j}\chi(z_i,\varepsilon_z)]。\quad(33)$$

考虑图像转角对横向像差的影响,展开指数函数 $\exp[\mathrm{j}\chi(z_i,\varepsilon_z)]$,有

$$\exp[\mathrm{j}\chi(z_i,\varepsilon_z)]=1-\frac{\mathrm{j}k}{\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})。\quad(34)$$

将其代入(33)式中,有

$$\Delta\boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)=\frac{2M}{E_c}\sqrt{\frac{m_0}{2e}}\dot{\boldsymbol{r}}_0\left[(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})-\frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ac}}}(\varepsilon_z-\varepsilon_{z1})-\frac{\mathrm{j}k}{\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})^2\right]。\quad(35)$$

(35)式中出现与 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 相关的项,表示该值是在与矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 相垂直的方向。由此可见,以初速矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 自物点逸出的 $\varepsilon_z\neq\varepsilon_{z1}$电子,在到达像面 $z=z_i=l$ 时,图像的弥散由两部分组成:静电场起主要作用,决定色球差的二级项;磁场的作用是次要的,转角 $\chi(z_i=l,\varepsilon_z)$引起图像极小的转动,其影响仅止于色球差的三级项。

该二级近轴色球差的模,在成像电子光学中被命名为 R-A 公式,即

$$\Delta r_{v2}^*=\frac{2M}{E_c}\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})。\quad(36)$$

作者曾在 1979 年的文章中给出(36)式[5]。

(36)式在成像电子光学系统中是普遍成立的,它实际起源于(32)式。早在 20 世纪 40 年代,德国学者莱克纳格尔(Recknagel)[6]和苏联学者阿尔齐莫维奇(Artimovich)[7]分别给出了成像系统的极限像面和最佳像面的弥散圆表达式,故(36)式命名为 R-A 公式。事实上,(36)式在国内外文献中均没有给出严格的证明。本文的贡献是在静电聚焦同心球

系统和复合电磁聚焦同心球系统的成像电子光学中严格推导了 R-A 公式[(36)式]。

(36)式表明，对于复合电磁同心球系统，静电场对近轴色球差起主要和决定性的作用。(35)式中与磁场相关的量仅在三级近轴色球差项出现，对成像质量没有决定性作用。

上文中已证明对于成像电子光学中两种不同类型的同心球系统，其一级近轴纵向色差 Δz_1^*[(23)式]和二级近轴横向色球差 $\Delta \boldsymbol{r}_{v2}^*$[(36)式]的表达式完全一致，它们仅与阴极面上的场强 E_c 和系统放大率 M 有关，与磁场和系统的具体结构无关。显然，这一结论并不是偶然的，它揭示了宽束电子光学成像中带有普遍意义的规律。

4.2　近轴放大率色差

对于两电极静电同心球系统，由阴极物面形成的几何图像位于阳极后某处曲率半径为 R_i 的屏面上；同样，对于复合电磁同心球系统，形成的几何图像位于曲率半径为 R_a 的屏面上。除近轴色球差外，其他形式的像差不复存在。但是，在宽束电子光学中，当讨论近轴成像时，将逸出光电子的物面和接受图像的成像面都抽象为平坦平面，近轴横向像差是在这个平坦的像面上形成和衡量的。因此，当研究轴外点逸出的电子成像时，除近轴色球差外，在此平坦像面上还出现其他类型的近轴像差。例如，其中之一是近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)$，根据(8)式可定义为

$$\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)=\boldsymbol{r}_0\{w(z_i,\varepsilon_z)\exp[\mathrm{j}\chi(z_i,\varepsilon_z)]-M\}。\tag{37}$$

根据(12)式，当 $z_i=l$ 时，$w(z_i,\varepsilon_z)$ 可表示为

$$w(z_i,\varepsilon_z)=\left(1+\frac{l}{R_c}\right)\cos\chi(z_i,\varepsilon_z)-\frac{2l\sqrt{-E_c}}{R_c k\Phi_{ac}}\sqrt{\varepsilon_z}\sin\chi(z_i,\varepsilon_z)。\tag{38}$$

(38)式中 $\sin\chi(z_i,\varepsilon_z)$ 可由(31)式表示，则 $\cos\chi(z_i,\varepsilon_z)$ 可表示为

$$\cos\chi(z_i,\varepsilon_z)=1-\frac{1}{2}\frac{k^2}{-E_c}\Phi_{ac}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)^2。\tag{39}$$

将(31)式和(39)式代入(38)式中，便可得到特解 $w(z_i,\varepsilon_z)$ 的近似表达式为

$$w(z_i,\varepsilon_z)=M\left[1-\frac{2(M-1)}{M}\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}\times\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)-\frac{1}{2}\frac{k^2}{-E_c}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})^2\right]。\tag{40}$$

与第一个特解 $v(z,\varepsilon_z)$ 位于像面 z_i 的 $v(z_i,\varepsilon_z)$ 类似，与系统放大率 M 相关的第二个特解 $w(z,\varepsilon_z)$ 位于像面 z_i 的 $w(z_i,\varepsilon_z)$ 也是成像电子光学的一个重要参量。与特解 $v(z_i,\varepsilon_z)$ 的不同之处在于 $w(z_i,\varepsilon_z)$ 不仅与静电场相关，也与磁场相关。但无论静电场或是磁场，它们对 $w(z_i,\varepsilon_z)$ 的影响仅止于二级小量。

由(37)式，近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)$ 可表示为

$$\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)=\boldsymbol{r}_0\left\{\left\{-2(M-1)\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\Phi_{ac}}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{z1}}{\Phi_{ac}}}\right)+M\left[1-\frac{1}{2}\frac{k^2}{-E_c}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})^2\right]\right\}\times\exp[\mathrm{j}\chi(z_i,\varepsilon_z)]-M\right\}。\tag{41}$$

将转角的指数函数表达式[(34)式]中的 $\exp[\mathrm{j}\chi(z_i,\varepsilon_z)]$ 代入(41)式，有

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)&=\Delta \boldsymbol{r}_{w2}^*(z_i,\varepsilon_z)+\Delta \boldsymbol{r}_{w3}^*(z_i,\varepsilon_z)=\\ &\boldsymbol{r}_0 M\left[-\frac{\mathrm{j}k}{\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})\right]+\\ &\boldsymbol{r}_0 M\left[-\frac{2(M-1)}{M\Phi_{ac}}\sqrt{\varepsilon_z}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})-\frac{\mathrm{j}k}{2\sqrt{-E_c}\sqrt{\Phi_{ac}}}(\varepsilon_z-\varepsilon_{z1})+\frac{k^2}{-E_c}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})^2\right]。\end{aligned}\tag{42}$$

(42)式中某些量与 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 相关。这表明这些量位于与矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 相垂直的方向。

二级近轴放大率色差的模可表示为

$$\Delta r_{w2}^*(z_i,\varepsilon_z)=|r_0|M\left[\frac{-k}{\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})\right]。\tag{43}$$

由(42)式可知，近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)$ 由磁场和静电场的共同作用造成，磁场的影响是主要的，静电场的影响是次要的。(43)式表明，二级近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_{w2}^*(z_i,\varepsilon_z)$ 完全是由磁场造成的，其值在与矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 相垂直的方向，占近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)$ 的绝大部分。在设计一般的复合电磁成像系统时，二级近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_{w2}^*(z_i,\varepsilon_z)$ 是一个不可忽视的量。

4.3　近轴各向异性色差

轴外物点另一个特殊类型的近轴色差是近轴各向异性色差 $\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)$。根据(8)式，$\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)$ 可表示为

$$\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_0)\sqrt{\frac{e}{8m_0}}B_0 v(z_i,\varepsilon_z)\times \exp[j\chi(z_i,\varepsilon_z)]。\quad(44)$$

将(32)式中 $v(z_i,\varepsilon_z)$ 及(34)式中 $\exp[j\chi(z_i,\varepsilon_z)]$ 代入(44)式,不难求得近轴各向异性色差的表达式为

$$\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_0)\frac{kM}{\sqrt{-E_c}}\times \left[(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})-\frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ac}}}(\varepsilon_z-\varepsilon_{z1})-\frac{jk}{\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})^2\right]。\quad(45)$$

其二级近轴各向异性色差的模可表示为

$$\Delta r_{u2}^*(z_i,\varepsilon_z)=|r_0|M\frac{k}{\sqrt{-E_c}}(\sqrt{\varepsilon_z}-\sqrt{\varepsilon_{z1}})。\quad(46)$$

由(45)式可知,近轴各向异性色差 $\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)$ 位于 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_0$ 的方向,完全由磁场引起的图像旋转所造成。其二级近轴各向异性色差 $\Delta \boldsymbol{r}_{u2}^*(z_i,\varepsilon_z)$[(46)式]与二级近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_{w2}^*(z_i,\varepsilon_z)$[(43)式]具有相似的表达式,但前者发生在初始矢径 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_0$ 的负方向,后者发生在与矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 相垂直的方向。

5 结束语

对于复合电磁同心球系统电子光学近轴像差,通过展开理想像面位置处图像转角表达式,推导得到近轴纵向像差和近轴横向像差的解析表达式,后者包括近轴横向色球差 $\Delta \boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)$、近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)$ 和近轴各向异性色差 $\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)$。这项工作使定量分析电子光学像差对系统像质的影响成为可能。

根据本文研究,可以得到如下结论。

1) 首次给出了复合电磁同心球系统中特解 $v(z,\varepsilon_z)$ 在理想像面位置处 $v(z_i,\varepsilon_z)$ 的解析表达式。$v(z_i,\varepsilon_z)$ 仅与线放大率 M、阴极面的电场强度 E_c 和像面处的电位 Φ_{ac} 相关,与磁感应强度 B_0 无关,由此证明了决定极限空间分辨率的二级近轴色球差能以 R-A 公式描述,并为该公式在静电像管和复合电磁像管的设计提供了理论依据。

2) 近轴色球差 $\Delta \boldsymbol{r}_v^*(z_i,\varepsilon_z)$ 是轴上物点的成像唯一像差,其形成是在加速电场作用下电子轴向初能的离散,像差的图形是一弥散圆。近轴纵向色差 Δz^* 定义为不同初能的电子的轴向离散。研究表明,此二像差完全是静电场造成的,磁场的影响是使圆的图像有轻微的旋转,对近轴横向色球差和近轴纵向色差并无实质性贡献。

3) 在磁场作用下,近轴放大率色差 $\Delta \boldsymbol{r}_w^*(z_i,\varepsilon_z)$ 使轴外物点的成像在沿矢径的方向有轻微变形,而近轴各向异性色差 $\Delta \boldsymbol{r}_u^*(z_i,\varepsilon_z)$ 使轴外物点的成像在与初始矢径相垂直的方向有轻微变形。且 $\Delta \boldsymbol{r}_{w2}^*(z_i,\varepsilon_z)$ 和 $\Delta \boldsymbol{r}_{u2}^*(z_i,\varepsilon_z)$ 形式简单,仅与电场强度 E_c、磁感应强度 B_0 及线放大率 M 相关。(43)、(46)和(36)式的组合可以用来评价一般复合电磁成像系统的轴外物点的像质。这一结论对复合电磁像管的设计具有重要意义。

综上,对轴上点成像,与静电同心球系统相比,复合电磁同心球系统由于磁场的引入,尽管图像的中心像差即近轴色球差并没有发生实质性变化,依然可用 R-A 公式表示,但在复合电磁同心球系统中,其轴外点成像出现了静电同心球系统没有的近轴各向异性色差。此外,由于磁场的影响,其近轴放大率色差的数量级也大于静电同心球系统。本文给出了这两种近轴像差极为简明的形式,很容易对轴外物点的成像质量作出估计。这些结论和认知均是第一次得到,将有助于研究人员设计复合电磁聚焦的像管。

参 考 文 献

[1] Zhou L W. Imaging electron optics of a combined electromagnetic concentric spherical system. Part A: paraxial optics[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(4): 0411001.
周立伟. 复合电磁同心球系统的成像电子光学. A章:近轴光学[J]. 光学学报, 2019, 39(4): 0411001.

[2] Zhou L W, Gong H, Zhang Z Q, *et al*. Static and dynamic imaging electron-optics and spatial-temporal aberrations in a bi-electrode spherical concentric system with electrostatic focusing[J]. Optik, 2011, 122(4): 287-294.

[3] Zhou L W, Gong H, Zhang Z Q, *et al*. Paraxial imaging electron optics and its spatial-temporal aberrations for a bi-electrode concentric spherical system with electrostatic focusing[J]. Optik, 2011, 122(4): 295-299.

[4] Zhou L W. Electron optics with wide beam focusing [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1993.
周立伟. 宽束电子光学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1993.

[5] Zhou L W. Electron optics of concentric spherical electromagnetic focusing systems[J]. Advances in Electronics and Electron Physics, 1979, 52: 119-

132.

[6] Recknagel A. Theorie des elektrischen elektronenmikroskops für selbststrahler [J]. Zeitschrift Für Physik, 1941, 117(11/12): 689-708.

[7] Artimovich L A. Electrostatic properties of emission system [J]. Information of Academy of Science, USSR, Series of Physics, 1944, 8(6): 313-328.