第 39 卷 第 4 期
2019 年 4 月

光 学 学 报
Acta Optica Sinica

Vol. 39, No. 4
April, 2019

·中文译本·

复合电磁同心球系统的成像电子光学. D 章:近轴方程渐近解

周立伟*

北京理工大学光电学院,北京 100081

摘要 首次探讨了复合电磁同心球系统近轴方程的渐近解。推导了复合电磁同心球系统中近轴方程两个特解的渐近解中各类系数的表达式。通过复合电磁同心球系统两个特解精确解的验证,证明了 Monastyrski [Journal of Technical Physics, 1978, 48(6): 1117-1122]提出的用渐近解求解成像电子光学近轴方程两个特解的方法正确且可行,仅个别之处需要改进。

关键词 成像系统;成像电子光学系统;复合电磁阴极透镜;复合电磁同心球系统;近轴方程的渐近解;近轴方程的近似解

中图分类号 O463 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201939.0411004

Imaging Electron Optics of a Combined Electromagnetic Concentric Spherical System. Part D: Asymptotic Solutions of Paraxial Equation

Zhou Liwei*

School of Optics & Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, *China*

Abstract The asymptotic solutions of the paraxial equation for a combined electromagnetic concentric spherical system have been explored. Expressions of each kind of coefficients of two special solutions given by the asymptotic method for solving the paraxial equation have been deduced. By verifying the exact solution of two special solutions of the combined electromagnetic concentric spherical system, this paper proves that the approach based on asymptotic solutions given by Monastyrski [Journal of Technical Physics, 1978, 48(6): 1117-1122] to solve the two special solutions of paraxial equation in electron optics is basically correct and feasible, and only a few aspects need to be improved.

Key words imaging systems; imaging electron optical systems; combined electromagnetic cathode lenses; combined electromagnetic concentric spherical systems; asymptotic solutions of paraxial equation; approximate solutions of paraxial equation

OCIS codes 110.2990; 260.2110; 230.0250

1 引 言

在研究宽束电子光学过程中,求解静电聚焦和复合电磁成像系统中电子光学近轴方程的二特解一直是最受关注的问题,由此出发可以研究电子光学成像系统自阴极面逸出的电子轨迹、成像特性及其像差。我们曾在一系列文章中探讨了两电极静电聚焦同心球系统的近轴成像、空间像差以及时间像差等问题[1-4]。文献[5]中由两电极静电同心球电子光学系统的理想模型,证明了渐近解可以是静电成像系统中求解电子光学近轴方程二特解的一条有效途径。这篇文章引起了学术界的兴趣和关注。渐近解求解近轴方程的最大优点是可以把近轴轨迹分解为按各级幂次排列的表达式,十分有利于寻求各级近轴横向像差。但是,渐近解途径能否有效解决复合电磁成像系统电子光学近轴方程二特解的求解问题,迄今为止并没有充足的证明。

在复合电磁同心球系统中,电场与磁场交叠在一起,电场使电子沿着轴向加速,磁场使电子绕轴旋转,故自光阴极逸出的电子轨迹并不是平面轨迹,而

收稿日期:2018-09-04;**修回日期**:2018-10-23;**录用日期**:2018-11-08

* **E-mail**:zhoulw@vip.sina.com

是转动的空间轨迹,可见其求解难度。迄今为止,仅两篇文章用渐近解的方法讨论了成像电子光学近轴方程二特解的求解问题[5-6];前者讨论的是一个均匀平行复合电磁系统,后者讨论的是一个静电聚焦型两电极同心球系统,得到了它们的近轴方程二特解的渐近解。但是这两篇文章中,前者采用的模型——均匀平行电磁复合成像系统过于简单,其电场强度与磁感应强度分布均匀且处处平行,后者仅研究没有磁场的静电聚焦型电子光学成像系统,不足以证明渐近解方法求解电子光学成像系统的普遍性和有效性。

文献[7-9]基于成像系统的电子光学近轴方程,推导了复合电磁同心球系统中近轴方程二特解的精确解和近似解的解析表达式,讨论了近轴横向像差。本文通过复合电磁同心球系统的理想模型,研究用渐近解的方法推导电子光学近轴方程二特解的求解,证明了渐近解方法是一条有效的途径,但现有关于渐近解寻求近轴方程二特解的方法和步骤尚待进一步完善。

2 渐近解求解近轴方程概述

文献[7]给出了电子光学复合电磁成像系统近轴轨迹 $\boldsymbol{r}(z)$ 的一般表达式:

$$\boldsymbol{r}(z)=\boldsymbol{r}_0 w(z)\exp[\mathrm{j}\chi(z)]+\left[\sqrt{\frac{m_0}{2e}}\dot{\boldsymbol{r}}_0-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_0)\sqrt{\frac{e}{8m_0}}B_0\right]v(z)\times\exp[\mathrm{j}\chi(z)],\tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 分别为电子自阴极面逸出时的初始位置矢量及径向初速矢量;$\boldsymbol{k}$ 为沿 z 轴正方向的单位矢量;e/m_0 为电子荷质比;B_0 为阴极面上的磁感应强度;$\chi(z)$ 为旋转坐标系 $u(x,y)$ 相对于固定坐标系 $r(X,Y)$ 转过的角度:

$$\chi(z)=\int_{z_0}^{z}\sqrt{\frac{e}{8m_0}}\frac{B(z)}{\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}}+\chi_0,\tag{2}$$

式中:$\Phi(z)$ 为轴上电位分布;$B(z)$ 为轴上磁感应强度分布;ε_z 为与逸出电子轴向初能对应的轴向初电位。通常 $\chi_0=\chi(z=0)=0$。

设 $v(z,\varepsilon_z)$ 和 $w(z,\varepsilon_z)$ 为旋转坐标系下成像电子光学近轴方程

$$\boldsymbol{u}''(z)+\frac{1}{2}\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)+\varepsilon_z}\boldsymbol{u}'(z)+\frac{1}{4}\left[\frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)+\varepsilon_z}+\frac{e}{2m_0}B^2(z)\right]\boldsymbol{u}(z)=0,\tag{3}$$

的两个特解,满足初条件:

$$v(z=0)=0,\ v'(z=0)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}},\tag{4}$$

$$w(z=0)=1,\ w'(z=0)=0。\tag{5}$$

此二特解还需满足朗斯基行列式:

$$\sqrt{\Phi(z)+\varepsilon_z}(v'w-vw')=1。\tag{6}$$

文献[6]给出了特解 $v(z,\varepsilon_z)$ 和 $w(z,\varepsilon_z)$ 的渐近解表示的求解途径,表述如下:

$$v(z,\varepsilon_z)=\sqrt{\Phi(z)}\xi_0(z)+\sqrt{\varepsilon_z}\eta_0(z)+\varepsilon_z\left[\frac{\xi_0(z)}{2\sqrt{\Phi(z)}}+\frac{1}{2}\xi_1(z)\sqrt{\Phi(z)}\right]+\cdots,\tag{7}$$

$$w(z,\varepsilon_z)=\omega_0(z)+\sqrt{\varepsilon_z}\sqrt{\Phi(z)}\zeta_0(z)+\varepsilon_z\omega_1(z)+\cdots,\tag{8}$$

式中:系数 ξ_0, η_0, ω_0, ξ_0, ξ_1, ω_1 为微分方程

$$L_0\begin{pmatrix}\xi_K\\ \zeta_K\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\xi''_{k-1}\\ \zeta''_{k-i}\end{pmatrix},\quad M_0\begin{pmatrix}\eta_K\\ \omega_K\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\eta''_{k-1}\\ \omega''_{k-i}\end{pmatrix}\tag{9}$$

的解,$\xi_{-1}=\zeta_{-1}=\eta_{-1}=\omega_{-1}=0$。$L_0$ 和 M_0 为线性微分算子,可表示为

$$L_0=\Phi(z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\frac{3}{2}\Phi'(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\left[\frac{3}{4}\Phi''(z)+\frac{e}{8m_0}B^2(z)\right],\tag{10}$$

$$M_0=\Phi(z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{2}\Phi'(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\left[\frac{1}{4}\Phi''(z)+\frac{e}{8m_0}B^2(z)\right]。\tag{11}$$

(9)式的初条件可以按照下列次序确定:

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{\xi_0(0)\Phi'(0)}{2}=1 & \rightarrow & \xi_0(0)+\eta_0(0)=0\\ & & \downarrow\\ & & \dfrac{\xi_1(0)\Phi'(0)}{2}+\xi'_0(0)+\eta'_0(0)=0\rightarrow\cdots\end{array},\tag{12}$$

$$\begin{array}{ccc}\omega_0(0)=1 & & \zeta_0(0)+\omega_1(0)=0\\ \downarrow & \uparrow & \downarrow\\ \dfrac{\zeta_0(0)+\Phi'(0)}{2}+\omega'_0(0)=0\rightarrow\cdots & & \end{array},\tag{13}$$

式中:箭头表示计算顺序。

必须指出的是,依作者实践,文献[6]给出的近轴方程第一个特解 $v(z,\varepsilon_z)$ 的渐近解表达式似有误:与变量 ε_z 相关的 $\xi_1(z)\sqrt{\Phi(z)}$ 项的系数不是 1,

而是 1/2。(7)式为修正后的结果。

3　复合电磁同心球系统的渐近解系数的解析表示

3.1　电位分布与磁感应强度分布的关系

在复合电磁同心球系统中，任意通过曲率中心 O 的直线都可以视为轴线。为简单起见，研究系统中心轴的情况。此时，系统的轴上电位分布 $\Phi(z)$ 和轴上磁感应强度分布 $B(z)$ 可表示为[7]

$$\Phi(z)=\frac{z}{nl-(n-1)z}\Phi_{ac},\qquad(14)$$

$$B(z)=\frac{n^2l^2}{[nl-(n-1)z]^2}B_0,\qquad(15)$$

式中：$n=R_c/R_a$，R_c 和 R_a 分别为同心球系统球面阴极和球面屏(阳极)的曲率半径，其值自曲率中心 O 算起，以电子行进的方向为正，反之为负；l 为此二电极之间的极间距离，$l=R_a-R_c$；B_0 为阴极面上的磁感应强度；Φ_{ac} 为阳极相对于阴极的电位；E_c 为阴极面上的电场强度，

$$E_c=\frac{\Phi_{ac}}{R_c(n-1)}=\frac{\Phi_{ac}}{-nl}。\qquad(16)$$

渐近解表达式的各系数可利用(9)式的二阶齐次线性微分方程求得，但方程的线性微分算子[(10)式和(11)式]中既有静电场参量，又有磁场参量，故寻求渐近解系数的解析表达式绝非易事。幸运的是，(14)式和(15)式表示的电位分布 $\Phi(z)$ 与磁感应强度分布 $B(z)$ 间有内在联系，使求解渐近解系数的解析表达成为可能。

由(14)式对 $\Phi(z)$ 求导数，可得

$$\Phi'(z)=(-E_c)\frac{(nl)^2}{[nl-(n-1)z]^2}。\qquad(17)$$

则(15)式表示的 $B(z)$ 可改写为

$$B(z)=\frac{\Phi'(z)}{-E_c}B_0。\qquad(18)$$

因之，(10)式和(11)式的线性微分算子中的磁参量经过(18)式的变换，可表示为

$$\frac{3}{4}\Phi''(z)+\frac{e}{8m_0}B^2(z)=\frac{3}{4}\Phi''(z)+\frac{k^2}{4(-E_c)}\Phi'^2(z),\qquad(19)$$

$$\frac{1}{4}\left[\Phi''(z)+\frac{e}{2m_0}B^2(z)\right]=\frac{1}{4}\left[\Phi''(z)+\Phi'^2(z)\frac{k^2}{-E_c}\right],\qquad(20)$$

式中：$k^2=\dfrac{e}{2m_0}\dfrac{B_0^2}{-E_c}$。

通过(18)式可用电场参数表示线性微分算子中的磁场参量，从而使求解(9)式成为可能. 文献[7]中曾给出(18)式。

3.2　求第一个特解的渐近解系数

求以(7)式表示的特解 $v(z)$ 的渐近解，其系数为 $\eta_0(z)$，$\xi_0(z)$ 和 $\xi_1(z)$。

首先求解系数 $\eta_0(z)$。由(9)式和(20)式，其相应的二阶线性齐次微分方程可表示为

$$M_0\{\eta_0(z)\}=\Phi(z)\frac{d^2}{dz^2}\eta_0(z)+\frac{1}{2}\Phi'(z)\frac{d}{dz}\eta_0(z)+\frac{1}{4}\left[\Phi''(z)+\Phi'^2(z)\frac{k^2}{-E_c}\right]\eta_0(z)=-\eta''_{-1}=0。\qquad(21)$$

若假定系数

$$\eta_0(z)=-\frac{2z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right],\qquad(22)$$

将其代入(21)式中，经过一系列微分运算，整理后可得

$$\left[\Phi'(z)+\frac{z\Phi''(z)}{2}-\frac{z\Phi'^2(z)}{\Phi(z)}\right]\times\left\{\frac{2k}{\sqrt{-E_c}\,[\Phi(z)]^{1/2}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]+\frac{3}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\right\}=0。\qquad(23)$$

不难证明，(23)式第一个括号内的值等于零，即

$$\Phi'(z)+\frac{z\Phi''(z)}{2}-\frac{z\Phi'^2(z)}{\Phi(z)}=0。\qquad(24)$$

因此，(23)式成立，(21)式是满足的。此外，当 $z=0$ 时，$\eta_0(z=0)$ 满足(12)式提出的初条件要求，即 $\eta_0(0)=-2/\Phi'_0$。由此可见，(22) 式正是系数 $\eta_0(z)$ 的解。

其次求解 $\xi_0(z)$。由(9)式和(19)式可得

$$L_0[\xi_0(z)]=\Phi(z)\frac{d^2\xi_0(z)}{dz^2}+\frac{3}{2}\Phi'(z)\frac{d\xi_0(z)}{dz}+\left[\frac{3}{4}\Phi''(z)+\frac{k^2}{4(-E_c)}\Phi'^2(z)\right]\xi_0(z)=-\xi''_{-1}=0。\qquad(25)$$

若假定系数

$$\xi_0(z)=\frac{2z}{[\Phi(z)]^{3/2}}\frac{\sqrt{-E_c}}{k}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right],\qquad(26)$$

将其代入(25)式中，可得类似(23)式的表达式：

$$\left[\Phi'(z)+\frac{z\Phi''(z)}{2}-\frac{z\Phi'^2(z)}{\Phi(z)}\right]\times\left\{-\frac{3\sqrt{-E_c}}{k\,[\Phi(z)]^{3/2}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]+\right.$$

$$\frac{2}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\bigg\}=0。\tag{27}$$

由(24)式可知,(27)式也是满足的。当 $z=0$ 时,$\xi_0(z=0)$ 满足(12)式提出的初条件要求,即 $\xi_0(0)=2/\Phi'_0$。由此可见,(26)式正是系数 $\xi_0(z)$ 的一个解。

在第一个特解 $v(z)$ 的渐近解表达式[(7)式]中,对于系数 $\xi_0(z)$,(25)式还有另一个解。若假定

$$\xi_0(z)=\frac{2z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right],\tag{28}$$

将其代入(25)式中,可得类似(23)式的表达式:

$$\left[\Phi'(z)+\frac{z\Phi''(z)}{2}-\frac{z\Phi'^2(z)}{\Phi(z)}\right]\times \left\{-\frac{1}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]-\frac{1}{\Phi(z)}\frac{2k\sqrt{\Phi(z)}}{\sqrt{-E_c}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\right\}=0。\tag{29}$$

由(24)式可知,(29)式也是满足的。同时,当 $z=0$ 时,(28)式也满足(12)式提出的初条件要求,即 $\xi_0(0)=2/\Phi'_0$。故(28)式是系数 $\xi_0(z)$ 的第二个解。选择(26)式的系数 $\xi_0(z)$ 作为(25)式所需要的解,原因是这个解经过了同心球电磁复合电子光学系统理论的检验。

第三,求解系数 $\xi_1(z)$。首先由文献[6]按照渐近解初条件[(12)式和(13)式]的顺序求 $\xi_1(z)$ 在 $z=0$ 处的值。当 $z=0$ 时,由(26)式和(22)式可得

$$\xi_0(0)=\xi_0(z=0)=\frac{2}{\Phi'_0},$$

$$\eta_0(0)=\eta_0(z=0)=-\frac{2}{\Phi'_0}。\tag{30}$$

可见,(30)式满足求解渐近解时(12)式初条件的要求:

$$\frac{\xi_0(0)\Phi'(0)}{2}=1\rightarrow\xi_0(0)+\eta_0(0)=0。\tag{31}$$

同样,在 $z=0$ 处对(26)式的 $\xi_0(z)$ 和(22)式的 $\eta_0(z)$ 进行微分,可求得

$$\eta'_0(z=0)=\frac{k^2}{\Phi'_0},\ \xi'_0(z=0)=0。\tag{32}$$

因此,由(11)式的初条件

$$\frac{\xi_1(0)\Phi'(0)}{2}+\xi'_0(0)+\eta'_0(0)=0,\tag{33}$$

便可得到待求系数 $\xi_1(z)$ 在 $z=0$ 处应满足的关系式:

$$\xi_1(0)=-\frac{2k^2}{\Phi'^2_0}。\tag{34}$$

由(9)式和(10)式求解微分方程

$$L_0[\xi_1(z)]=\Phi(z)\frac{d^2\xi_1(z)}{dz^2}+\frac{3}{2}\Phi'(z)\frac{d\xi_1(z)}{dz}+\left[\frac{3}{4}\Phi''(z)+\frac{k^2}{4(-E_c)}\Phi'^2(z)\right]\xi_1(z)=-\xi''_0。\tag{35}$$

待解方程 $L_0[\xi_1(z)]$ 与 $L_0[\xi_0(z)]$ 完全相同,只不过后者是二阶线性齐次微分方程,而前者是二阶非齐次微分方程。上文已求出 $L_0[\xi_0(z)]$ 的两个特解,则 $L_0[\xi_1(z)]$ 的二阶线性齐次微分方程的二特解必然有类似形式,只是常系数存在差异。

对于系数 $\xi_1(z)$,假定

$$\xi_1(z)=-\frac{2z}{[\Phi(z)]^{\frac{3}{2}}}\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\tag{36}$$

满足初条件[(34)式],即

$$\xi_1(0)=\xi_1(z)\,|_{z=0}=-\frac{2z}{[\Phi(z)]^{3/2}}\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\bigg|_{z=0}=-\frac{2k^2}{\Phi'^2_0},\tag{37}$$

故(36)式是(35)式的一个特解。

(35)式的第二个特解可假定为

$$\xi_1(z)=-\frac{2z}{\Phi(z)}\frac{k^2}{-E_c}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right],\tag{38}$$

也满足初条件[(34)式],即

$$\xi_1(0)=\xi_1(z)\,|_{z=0}=-\frac{2z}{\Phi(z)}\frac{k^2}{-E_c}\bigg|_{z=0}=-\frac{2k^2}{\Phi'^2_0}。\tag{39}$$

由此可见,求得的系数 $\xi_1(z)$ 的两个特解都满足 $L_0[\xi_1(z)]$ 的二阶线性齐次微分方程以及(12)式和(13)式确定的初条件要求。但由校核结果来看,只有(36)式的渐近解是合理且为我们所需要的。文献[6]提出的渐近解求解步骤并没有谈到如何选择二阶线性齐次微分方程的解。此外,按照(35)式的微分方程,可以由 $\xi_0(z)$ 解的表达式[(26)式或(28)式]求得 ξ''_0,以确定非齐次微分方程[(35)式]的右端项,从而求得该方程的通解。依作者的看法,并没有必要借助二阶线性非齐次微分方程的通解来求得渐近解的系数。由此,文献[6]建议的渐近解方法求解近轴方程二特解似乎需要作一些补充和修正。

3.3 求第二个特解的的渐近解系数

求(8)式表示的第二个特解 $w(z)$ 的渐近解,其

系数分别为$\omega_0(z)$,$\zeta_0(z)$和$\omega_1(z)$。

首先求解$\omega_0(z)$。由(9)式和(20)式可知,$\omega_0(z)$应满足

$$M_0[\omega_0(z)]=\Phi(z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\omega_0(z)+\frac{1}{2}\Phi'(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\omega_0(z)+\left\{\frac{1}{4}\Phi''(z)+\frac{k^2}{4(-E_c)}\Phi'^2(z)\right\}\omega_0(z)=-\omega''_{-1}=0。\tag{40}$$

由特解$w(z)$的初条件$w(z=0)=1$,可以得到$\omega_0(z)$的初条件:$\omega_0(z=0)=1$。令

$$\omega_0(z)=(-E_c)\frac{z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right],\tag{41}$$

将其代入(40)式中,可得

$$\left[\Phi'(z)+\frac{z\Phi''(z)}{2}-\frac{z\Phi'^2(z)}{\Phi(z)}\right]\times\left\{\frac{3E_c}{2\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]-\frac{k\sqrt{-E_c}}{[\Phi(z)]^{1/2}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\right\}=0。\tag{42}$$

由(24)式可见,(41)式是$\omega_0(z)$的一个特解。鉴于

$$(-E_c)\frac{z}{\Phi(z)}=1+\frac{z}{R_c},\tag{43}$$

(41)式可表示为

$$\omega_0(z)=\left(1+\frac{z}{R_c}\right)\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]。\tag{44}$$

可见,(44)式满足$\omega_0(z=0)=1$的初条件。

其次求解系数$\zeta_0(z)$。与上述方法类似,由(9)式和(19)式可得

$$\Phi(z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\zeta_0+\frac{3}{2}\Phi'(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\zeta_0+\left[\frac{3}{4}\Phi''(z)+\frac{e}{8m_0}B^2(z)\right]\zeta_0=-\zeta_{-1}=0。\tag{45}$$

此时,$\zeta_0(z=0)$需满足(13)式给出的初条件,即

$$\frac{\zeta_0(0)\Phi'(0)}{2}+\omega'_0(0)=0。\tag{46}$$

先求$\omega'_0(z=0)=\omega'_0(0)$的值。对(44)式作微分运算,可得

$$\omega'_0(z=0)=\frac{1}{R_c}-\frac{1}{2}k^2。\tag{47}$$

则根据(46)式,可得系数$\zeta_0(z)$在$z=0$时的值:

$$\zeta_0(0)=-\frac{2\omega'_0(0)}{\Phi'(0)}=\frac{2}{E_c}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{k^2}{2}\right)。\tag{48}$$

若假定满足(45)式的系数$\zeta_0(z)$具有如下形式:

$$\zeta_0(z)=\left[\sqrt{-E_c}k\left(1-\frac{2}{k^2R_c}\right)\right]\times\frac{z}{[\Phi(z)]^{3/2}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right],\tag{49}$$

它不仅满足(45)式,也满足(48)式的初条件,即

$$\zeta_0(0)=\zeta_0(z=0)=\left[k^2\left(1-\frac{2}{k^2R_c}\right)\right]\frac{z}{\Phi(z)}\times\left.\frac{\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]}{\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}}\right|_{z=0}=\frac{2}{E_c}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{k^2}{2}\right)。\tag{50}$$

故(49)式是系数$\zeta_0(z)$的解。

求解(8)式与ε_z变量相关的系数$\omega_1(z)$,需满足(9)式和(19)式,即

$$M_0[\omega_1(z)]=\Phi(z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\omega_1(z)+\frac{1}{2}\Phi'(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\omega_1(z)+\frac{1}{4}\left[\Phi''(z)+\frac{k^2}{-E_c}\Phi'^2(z)\right]\omega_1(z)=-\omega''_0。\tag{51}$$

文献[6]并未说明$\omega_1(z)$是微分方程(50)式的单独解还是组合解,但不管方程的解如何,其初条件应满足(13)式要求。由(48)式,有

$$\omega_1(0)=-\zeta_0(0)=-\frac{2}{E_c}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{k^2}{2}\right)。\tag{52}$$

假定系数$\omega_1(z)$具有如下形式:

$$\omega_1(z)=-k\sqrt{-E_c}\frac{z}{2[\Phi(z)]^{3/2}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]-\left(\frac{k^2}{2}-\frac{2}{R_c}\right)\frac{z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right],\tag{53}$$

上文已证明(53)式中的正弦解和余弦解都是二阶齐次线性方程(51)式的特解,如果它们能同时满足$z=0$时的初条件[(52)式]要求,其和也必然是(51)式的解。

将(53)式的系数$\omega_1(z)$分为两项,求它们在$z=0$时的值,即

$$\left.-k\sqrt{-E_c}\frac{z}{2[\Phi(z)]^{3/2}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\right|_{z=0}=\left.-k^2\frac{z}{2\Phi(z)}\frac{\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]}{\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}}\right|_{z=0}=k^2\frac{1}{2E_c}-$$

$$\left.\left(\frac{k^2}{2}-\frac{2}{R_c}\right)\frac{z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\right|_{z=0}=\frac{1}{E_c}\left(\frac{k^2}{2}-\frac{2}{R_c}\right)。\tag{54}$$

则有

$$\omega_1(z=0)=\omega_1(0)=\frac{k^2}{2E_c}+\frac{1}{E_c}\left(\frac{k^2}{2}-\frac{2}{R_c}\right)=$$
$$-\frac{2}{E_c}\left(\frac{1}{R_c}-\frac{k^2}{2}\right)。\qquad(55)$$

由此，证明了系数 $\omega_1(z)$ 假定的解[(53)式]不仅满足(51)式的要求，而且满足(52)式的初条件要求，故(53)式正是系数 $\omega_1(z)$ 的解。

将以(22)、(26)和(36)式表示的渐近解系数 $\eta_0(z)$，$\xi_0(z)$ 和 $\xi_1(z)$ 代入第一个特解 $v(z)$ 的表达式[(7)式]中，将以(41)、(49)和(53)式表示的渐近解系数 $\omega_0(z)$，$\zeta_0(z)$ 和 $\omega_1(z)$ 代入第二个特解 $w(z)$ 的表达式[(8)式]中，便可得到 $v(z)$ 和 $w(z)$ 的渐近解表达式：

$$v(z,\varepsilon_z)=\frac{2z}{\Phi(z)}\frac{\sqrt{-E_c}}{k}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]-$$
$$\sqrt{\varepsilon_z}\frac{2z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]+$$
$$\varepsilon_z\left\{\frac{z}{[\Phi(z)]^{3/2}}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]-\right.$$
$$\left.\frac{z}{\Phi(z)}\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\right\},\qquad(56)$$

$$w(z,\varepsilon_z)=(-E_c)\frac{z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]+$$
$$\sqrt{\varepsilon_z}\sqrt{-E_c}\,k\left(1-\frac{2}{k^2R_c}\right)\frac{z}{\Phi(z)}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]-$$
$$\varepsilon_z\left\{k\sqrt{-E_c}\frac{z}{2[\Phi(z)]^{3/2}}\sin\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]+\right.$$
$$\left.\left(\frac{k^2}{2}-\frac{2}{R_c}\right)\frac{z}{\Phi(z)}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{-E_c}}\sqrt{\Phi(z)}\right]\right\}。\qquad(57)$$

(56)式和(57)式与我们得到的复合电磁同心球系统近轴方程的精确解展开式[9]是完全一致的。由此证明渐近解求解电子光学近轴方程的可行性。

4　结束语

自1978年俄罗斯学者 M. A. Monastyrski[6]提出渐近解求解电子光学近轴方程特解的方法以来，由于问题涉及求解二阶线性齐次微分方程，难度相当大。作为特例，他提出用渐近解求解一个非常简单的电子光学问题——平行均匀复合电磁聚焦系统，即假定电场强度 $E(z)=E(0)=E_c=\text{const.}$，轴上电位分布 $\Phi(z)=-E_cz$，轴上磁感应强度 $B(z)=B(0)=B_0=\text{const.}$，显然这大大降低了求解微分方程的难度。30余年来，没有更好的实例说明渐近解能解决成像电子光学近轴方程二特解的问题。2011年，我们首先用渐近解方法解决了静电同心球系统的电子光学问题，即假定轴上电位分布 $\Phi(z)$ 如(14)式所示，其求解难度稍大一些。现在我们探讨渐近解求解复合电磁同心球系统的电子光学问题，也就是将(15)式的磁感应强度分布 $B(z)$ 叠加在(14)式的轴上电位分布 $\Phi(z)$ 上，求解这类问题的难度变得更大。我们的目的是证明渐近解确实可以用于求解成像电子光学近轴方程的特解。

应该指出，我们是比较幸运的。但是，如果没有我们以前研究静电与电磁复合同心球系统电子光学的工作，换言之，如果我们事先没有找到这两个系统电子光学近轴方程特解的解析解，我们的数学技巧不可能解决渐近解求解二阶线性齐次微分方程的问题。也就是说，我们事先已知特解 $v(z)$ 和 $w(z)$ 的正确解析解，以此复核渐近解的理论。说清楚这一点并不感到难为情。

我们用静电和电磁同心球电子光学系统验证得知，M. A. Monastyrski 提出的渐近解方法求解近轴方程特解的途径是正确可行的。

如果说 M. A. Monastyrski 的方法存在某些缺憾的话，我们已在上文指出，文献[2]给出的 $v(z,\varepsilon_z)$ 表达式似有笔误，与变量 ε_z 相关的 $\xi_1(z)\sqrt{\Phi(z)}$ 项的系数不是1，而是1/2[(7)式]。文章中提出对某些系数还需要求解二阶非齐次微分方程，也就是说，要考虑该方程的通解。实践表明这完全没有必要。我们解决的两个实例表明，求解电子光学近轴方程二特解的渐近解时，其系数只需要二阶线性齐次微分方程的一个特解或两个特解的组合，不需要求解二阶非齐次方程的通解。于是，可以假设(35)式的右端项等于零，即 $-\xi_0''=0$。

参　考　文　献

[1] Zhou L W, Gong H, Zhang Z Q, *et al*. Paraxial imaging electron optics and its spatial-temporal aberrations for a bi-electrode concentric spherical system with electrostatic focusing[J]. Optik, 2011, 122(4): 295-299.

[2] Zhou L W, Gong H, Zhang Z Q, *et al*. Static and dynamic imaging electron optics and spatial-temporal aberrations in a bi-electrode spherical concentric system with electrostatic focusing[J]. Optik, 2011, 122(4): 287-294.

[3] Zhou L W. Electron optics with wide beam focusing[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1993.
周立伟. 宽束电子光学[M]. 北京：北京理工大学出

版社, 1993.

[4] Zhou L W. Electron optics of concentric spherical electromagnetic focusing systems[J]. Advances in Electronics and Electron Physics, 1979, 52: 119-132.

[5] Zhou L W, Gong H. Theory of paraxial lateral aberrations of electrostatic imaging electrostatic electron optics based on asymptotic solutions and its verification[J]. Optik, 2011, 122(4): 300-306.

[6] Monastyrski M A. On asymptotic solutions of paraxial equation of electron optics[J]. Journal of Technical Physics, 1978, 48(6): 1117-1122.

[7] Zhou L W. Imaging electron optics of a combined electromagnetic concentric spherical system. Part A: paraxial optics[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(4): 0411001.
周立伟. 复合电磁同心球系统的成像电子光学. A章: 近轴光学[J]. 光学学报, 2019, 39(4): 0411001.

[8] Zhou L W. Imaging electron optics of a combined electromagnetic concentric spherical system. Part B: paraxial aberration[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(4): 0411002.
周立伟. 复合电磁同心球系统的成像电子光学. B章: 近轴像差[J]. 光学学报, 2019, 39(4): 0411002.

[9] Zhou L W. Imaging electron optics of a combined electromagnetic concentric spherical system. Part C: approximate solutions of paraxial equation[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(4): 0411003.
周立伟. 复合电磁同心球系统的成像电子光学. C章: 近轴方程近似解[J]. 光学学报, 2019, 39(4): 0411003.